高等学校

平 成 4 年 度

教 育 研 究 員 研 究 報 告 書

数　　　学

東 京 都 教 育 委 員 会

平成４年度教育研究員（数学）名簿

班	研究テーマ	学校名	氏名
I	幾何学的な解釈を通しての発見学習の指導 －放物線を例にとって－	都立広尾高等学校	長津美明
		都立深川高等学校	若井文隆
		都立武蔵高等学校	田中　洋
		都立狛江高等学校	大石　隆
II	数列の和と数学的帰納法を関連付け，自ら類推し，帰納的な考え方を育てる指導法の研究	都立青山高等学校	三保和彦
		都立烏山工業高等学校	福井宏昌
		都立南葛飾高等学校	佐藤則夫
		都立東大和南高等学校	古川邦夫
III	パソコンを活用した数学Ｃの指導	都立蒲田高等学校	坂本良一
		都立淵江高等学校	藤田　泉
		都立城東高等学校	黒崎健二
		都立砂川高等学校	吉田順一
		都立永山高等学校	小林雅史

担当　教育庁指導部高等学校教育指導課指導主事　吉野恒夫

主題　身近な事象や作業を通して
数学的な見方や考え方のよさを理解させる指導法の工夫

目　　次

Ⅰ　幾何学的な解釈を通しての発見学習の指導

― 放物線を例にとって ―

1. はじめに

数学の学習で大切なことは，「数学を理解すること」である。しかし実際の学習では定理や公式を覚え，それらを使って問題を解くことはできるが何をやっているのかよく分からないことがある。数学の理解を容易にするためには，数学は単純明快であり，数学は有機体であるということを知ることが必要である。また，身近な事象と数学の内容を関連付け，イメージしやすくすることが重要である。

以上の観点に立って，本研究では「幾何学的解釈を通しての発見学習の指導」をテーマに取り上げ，放物線という対象を通して，初等幾何と２次関数，２次関数のグラフの平行移動と座標軸の平行移動について指導法の改善を図った。幾何はいろいろな数学の概念を視覚化してくれるものであり，人間の直観に基づいている。本研究では，教材の作成に当たってこれらのことを踏まえ，様々な工夫を試みた。

2. 研究のねらい

今回改訂された学習指導要領によれば，数学Ⅰの２次関数の指導にはいろいろな工夫が望まれている。現行の学習指導要領と比較して，代数的な計算が簡略化され，特に２次関数のグラフの平行移動，すなわち，２次関数を標準形に変形して，グラフの位置関係を調べることに工夫が求められている。また変化するものの代表として２次関数は数学Ⅰで取り扱われるが，中学校との関連にも留意することが望まれている。

これらの指摘をうけ，今回改訂された数学Ⅰの目標「中学校数学との関連を踏まえ，生徒の日常生活に関係が深く，学習することの意義が分かりやすいものを取り上げる。その具体的な事象の考察を通して数学的な見方や考え方のよさを認識させる。」に留意して，幾何的な考え方を重視し，次の点にねらいを定めて研究をすすめた。

(1) 中学校で学んだ放物線が日常生活の上でどのように活用されているか，具体的に例示し，その根拠となる幾何学的な性質を初等幾何を用いて導く。

(2) 放物線の幾何学的性質は，座標軸を適当にとることによって２次関数 $y=ax^2$ の形になることを導き，２次関数の一般形 $y=ax^2+bx+c$ は座標軸の取り方によるもので

あり，$y=ax^2$ と本質的な違いはないことを理解させる。

3. 研究内容

2次関数は高校数学（数学Ⅰ）で扱う関数の基本的な対象であり，その指導法には十分な配慮が必要である。そこで，現行の指導法では生徒が誤解したり，計算でいきづまるところを問題点として指摘し，それを改善するいくつかの工夫を試みた。

(1) 2次関数の導入において，生徒の日常生活との関連が希薄である。$y=ax^2$ という対象を考える前に導入を工夫する。

(2) $y=ax^2$ のグラフ（放物線）を学習するのに，$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\cdots$等の離散的なデータの値を計算し，グラフの概形を理解させようとしている。その結果，生徒の中にはグラフが折れ線になってしまうものがいる。放物線という曲線をもっと身近に体験させる方法を工夫する。

(3) $y=ax^2+bx+c$のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動して得られるが，その際$y=ax^2+bx+c$の右辺を変形（平方完成）する必要が生じる。その結果，平方完成という計算にこだわり，グラフの平行移動という幾何学的な性質の理解につながっていないことが多い。この点を改善する。

4. 研究方法

(1) 共通テキスト（4ページ参照）を使用して，身近にある放物線（面）と思われるものを考えさせ，その性質を中学校で学んだ初等幾何を用いて明らかにさせる。

(2) 曲線の性質を明らかにしていく過程で，簡単な作業を通して放物線を描かせ，描かれた曲線をもとに，グラフのさまざまな幾何学的性質を確認させる。

(3) 作業や証明を通して，放物線という曲線に対してどのような感想をもったかアンケートをとる。

(4) 座標軸を導入し，曲線の方程式が$y=ax^2$ になることを示す。

(5) 点の座標による表し方は，座標軸の平行移動により変化する。そこで，xy座標軸を平行移動したXY座標軸を考え，2つの座標軸における座標の関係について理解させる。

(6) 応用として放物線の平行移動を考え，xy座標における$y=ax^2+bx+c$は，座標軸の平行移動によりXY座標に対しては，$Y=aX^2$ の形に表せることを示す。

(7) 従来の平方完成による方法との比較検討を行うため，指導後共通テストを実施する。

5. 使用テキスト

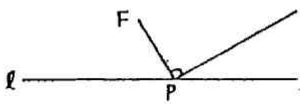
放物線の幾何学的性質

【設問Ⅰ】中学校で学んだ放物線は文字通りボールを投げ上げたときの軌跡と考えることができるが、これと同じ形をしたもので日常見られるものにどんなものがありますか。

【設問Ⅱ】それらに共通な性質として、どのようなものがあると思いますか。

定規を使って放物線を描いてみよう

【設問Ⅲ】紙のうえに、１本の直線 l とその線上にない１点Ｆをとる。(直線と点はできるだけ近い方がよい) 次に三角定規を使って、直角の頂点Ｐが常に直線 l に、斜辺以外の辺が点Ｆ上に来るよう定規をおいてＰを端点とする半直線を引いてみよう。Ｐの位置を l 上で変えながら、その作業を繰り返していくとどうなりますか。
さらに直線と点の距離を変えて同じ作業をしてみよう。
⇒図Ⅰ



【設問Ⅳ】図のように l 上に２点Ｐ、Ｑをとり、２直線の交点をＲとする。　このとき
∠ＱＲＦ＝∠ＡＰＦ・・・・①
を示せ。　⇒図Ⅱ

設問ⅣでＱがＰに近づくと、交点ＲがＳに近づくとすれば
①の性質がそのまま保たれるから
∠ＰＳＦ＝∠ＡＰＦ・・・・・②
⇒図Ⅲ

Ｓは設問Ⅲで求めた曲線上の点であり、ＰＳはその曲線上の点Ｓにおける接線であることを確かめよ。

【設問Ⅴ】図のようにＳを通って m に平行な直線を引く。
このとき
∠ＶＳＵ＝∠ＰＳＦ
を示せ。　⇒図Ⅳ

従って
Ｕの方から光をあてるとＦに集まることが分かる。
この点Ｆを焦点という。
逆にＦに光源をおくと反射してすべてｍに平行な光線となる。

【設問Ⅵ】ＡＦ＝ＡＬ　となるようにＬを m 上にとる
Ｌを通り l に平行な直線ＴＬを引く。
線分ＴＰを引いたとき
ＴＰＦは一直線上にあり
Ｐは ＴＦの中点である。……③
⇒図Ⅴ

そのことを次の手順で示せ。
ΔＭＰＦ≡ΔＳＰＦ　⇒　ＰＭ＝ＰＳ
ΔＰＭＡ≡ΔＰＳＷ　⇒　ＰＡ＝ＰＷ……④
ΔＰＡＦ≡ΔＰＷＴ

【設問Ⅵ】の図より
ΔＳＦＰ≡ΔＳＴＰ
ＳＦ＝ＳＴ　となり
ＳＦ＝ＳＴ　となる点Ｓを描いていけば放物線となる……⑤
実際に、描いてみよう。

折り紙で放物線を描いてみよう

【設問Ⅶ】④の性質を使って実際に折り紙（Ｂ４程度の薄紙がよい）で放物線を描いてみよう。
⇒図Ⅵ

(1) 図のように、まず直線 n と点Ｆを紙上に書く。
n とＦはできるだけ近いほうがよい。

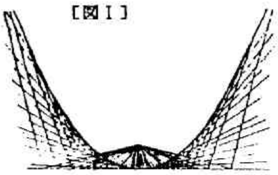
(2) ＦをＰに関して折り曲げＴに合わせると折り目の線 h ができる。同様にして、点Ｆを n 上の点Ｔ′、Ｔ″に合わせると、折り目の線 h'、h'' ができる。

この作業を繰り返すと放物線ができる。

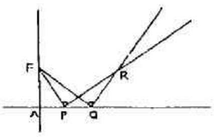
【設問Ⅷ】　折り紙で作ったグラフに座標軸を導入してみよう。
まず、
$AW^2=4AF \cdot AZ$　⑥
を示せ。　⇒図Ⅶ
［ヒント　ΔＳＰＷ∽ΔＰＦＡ　を用いよ。］

よって、AW^2 はＡＺに比例していることが分かる。
ここで、直線ＡＷを x 軸、直線ＡＺを y 軸、Ａを原点とする座標平面を導入し、$S(x, y)$ とする。
$AW=x$, $AZ=y$ だから ⑥より $x^2=4AF \cdot y$
$\frac{1}{4AF}=a$ とすると　$y=ax^2$　となる。
これより、放物線の形は a の値すなわち ＡＦの長さで決まることが分かる。

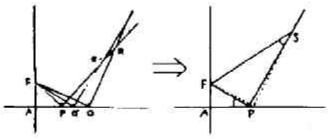
［図Ⅰ］



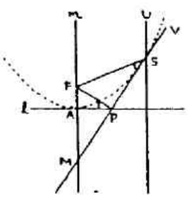
［図Ⅱ］



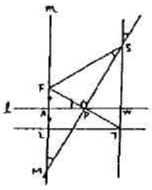
［図Ⅲ］



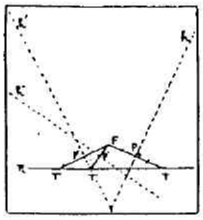
［図Ⅳ］



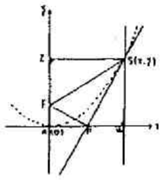
［図Ⅴ］



［図Ⅵ］



［図Ⅶ］

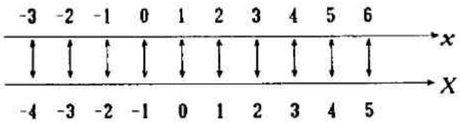


座標軸の平行移動と２次関数のグラフ

---

［1］座標軸の平行移動

下の図はx軸を正の方向に１だけ平行移動して得られる新しい座標軸をX軸とし、x軸とX軸の座標の対応を表したものである。

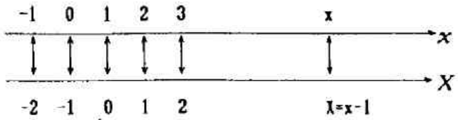


x軸を正の方向に１だけ平行移動したものがX軸であるから、両軸の同じ点の座標はX軸上の座標の方がx軸上の座標よりも１だけ小さくなる。

上の図ではx軸、X軸の両軸上の整数の間の対応を表している。同じ点におけるx軸上及びX軸上の座標をそれぞれx, Xで表すと

$X=x-1$ ……………… ①

となる。



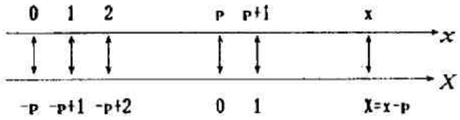
問１　公式①が成り立つことを整数の座標で確かめよ。

問２　x軸を正の方向に－１だけ平行移動(負の方向に１だけ平行移動）して得られる座標軸をX軸とする。このときx軸とX軸の整数の間の対応を書き表せ。また同じ点における両軸の座標の間にはどのような関係があるか。

一般にx軸を正の方向にｐだけ平行移動して得られる座標軸をX軸とし同じ点の両軸の座標をそれぞれx、XとするとxとXの間には

$$\boxed{X=x-p}$$

という関係がある。



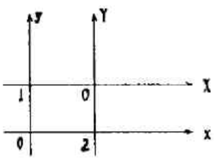
問３　x軸を平行移動(正または負の向きに)して得られる座標軸をX軸とする。同じ点の両軸の座標をそれぞれx、Xとする。x、Xの間に次の関係が成り立つときX軸はx軸をどのように平行移動して得られるか、図示して答えよ。

(1) $X=x+\frac{1}{2}$　　(2) $X=x-\sqrt{2}$

(3) $x=X+\frac{3}{2}$　　(4) $x=X+\sqrt{3}$

［2］平面上の座標軸とその平行移動

右の図はx軸を正の方向に２、y軸を正の方向に１だけそれぞれ平行移動して得られる座標軸をそれぞれX軸、Y軸としたものである。



x軸y軸で定められる平面をxy座標平面、X軸Y軸で定められる平面をXY座標平面と呼ぶことにする。このとき次の問いに答えよ。

問４　xy座標平面の次の各点はXY座標平面のどのような座標をもつ点に対応するか。

	xy座標平面		XY座標平面
(1)	(0、0)	⟷	(　,　)
(2)	(1、2)	⟷	(　,　)
(3)	(-1、3)	⟷	(　,　)

問５　これらの結果から座標平面上 点Ｐに対しxy座標平面で、Ｐ(x、y)　XY座標平面で、Ｐ(X、Y)とするとき、座標(x、y)(X、Y)の間にはどのような関係式が成立するか。

$X=$　　　　　$Y=$

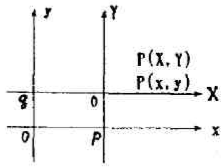
問6　x、y軸を次の方向に平行移動して X、Y軸を得るとき、座標(x, y) (X, Y)の間の関係式を求めよ。

(1) x軸の正の方向に1、y軸の正の方向に-1
(2) x軸の正の方向に-1、y軸の正の方向に3
(3) x軸の正の方向に$-\frac{1}{2}$、y軸の正の方向に$-\frac{2}{3}$
(4) x軸の負の方向に2、y軸の正の方向に-2

問7　座標(x, y) (X, Y)の間に次の関係があるとき x、y軸をどのように平行移動すればX、Y軸が得られるか。

(1) $\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y+\frac{1}{2} \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=X-\frac{1}{3} \\ y=Y+1 \end{cases}$

一般にx、y軸をそれぞれ正の方向にp、qだけ平行移動してX軸、Y軸を得るときxy座標平面上の点$P(x, y)$とXY座標平面上の点$P(X, Y)$に対して座標の間に次の関係式が成り立つ。

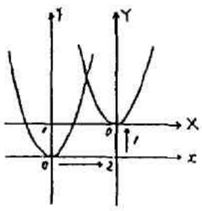


$$\boxed{X=x-p \qquad Y=y-q}$$

[3] $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=ax^2$ のグラフの平行移動

右の図は2次関数$y=ax^2$のグラフをx軸の正の方向に2，y軸の正の方向に1だけ平行移動したグラフを示している。このグラフの方程式がどのようになるかを調べよう。



いま図のようにX軸、Y軸をとる。このときXY座標平面ではグラフの方程式は

$$Y=2X^2 \cdots\cdots ①$$

となる。
ところで、xy座標平面、XY座標平面の間には、すでにみたように次の関係が成り立つ

$$\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y-1 \end{cases} \cdots\cdots ②$$

②を①へ代入すると

$$y-1=2(x-2)^2$$
$$\therefore\ y=2(x-2)^2+1 \cdots\cdots ③$$

このことから$y=2x^2$ のグラフをx軸の正の方向に2，y軸の正の方向に1だけ平行移動して得られるグラフの方程式はxy座標平面では③の形で与えられることが分かる。

問8　$y=2(x-2)^2+1$ で与えられる放物線の軸の方程式と頂点の座標を求めよ。

問9　$y=2x^2$ のグラフをx軸の負の方向2 y軸の負の方向に1だけ平行移動して得られるグラフをかけ。またそのグラフの方程式を求めよ。

さて、③は右辺を展開して整理すると

$$y=2x^2-8x+9 \cdots\cdots ④$$

となる。④の形で与えられた2次関数は③の形に変形して、そのグラフを書くことができる。③のグラフは$y=2x^2$のグラフを平行移動して得られたのだから、④のグラフと$y=2x^2$のグラフは同じ形でありその位置が異なるだけである。

一般に $a\neq0$ のとき
<u>$y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動したものである。</u>（証明略）

【例題】2次関数 $y=2x^2-8x+5$ のグラフをかけ。

〔解〕
$$y=2x^2-8x+5 \cdots\cdots ①$$
$$Y=2X^2 \cdots\cdots ②$$
$$\begin{cases} X=x-p \\ Y=y-q \end{cases} \cdots\cdots ③$$

①のグラフは $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものであるからx軸、y軸をそれぞれ正の方向にp、q平行移動してX軸、Y軸を作るとき①はXY座標平面で②とかくことができる。③は座標の間の関係式である。
③を②へ代入して

$$y-q=2(x-p)^2=2x^2-4px+2p^2$$
$$\therefore\ y=2x^2-4px+2p^2+q \cdots\cdots ④$$

①と④の右辺は同じ式であるから係数を比較して

$$\begin{cases} -4p=-8 \\ 2p^2+q=5 \end{cases} \quad これより \quad \begin{cases} p=2 \\ q=-3 \end{cases}$$

ゆえに
$$\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y-(-3)=y+3 \end{cases}$$

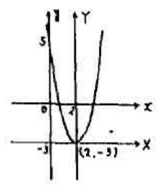
すなわち
$$y-(-3)=2(x-2)^2$$
$$\therefore\ y=2(x-2)^2-3 \cdots\cdots ⑤$$

となる。

これより①のグラフは頂点が $(p, q)=(2, -3)$ で軸が $x=2$ で下に凸の放物線で次の図のようになる。

〔別解〕

$$\begin{aligned} y&=2x^2-8x+5 \\ &=2(x^2-4x)+5 \\ &=2\{(x^2-4x+4)-4\}+5 \\ &=2\{(x-2)^2-4\}+5 \\ &=2(x-2)^2-3 \end{aligned}$$



ゆえに求めるグラフは $y=2x^2$ のグラフをx軸の正の方向に2，y軸の負の方向に3だけ平行移動したものである。

問10　次の2次関数のグラフをかけ

(1) $y=x^2+6x+7$　(2) $y=2x^2-4x-1$
(3) $y=-x^2+2x+1$　(4) $y=\frac{1}{2}x^2+x-1$

6. 小テストの結果分析

4校の正答率は以下の通りである。

	問題(1)	問題(2)	問題(3)	問題(4)
A 校	39%	30%	34%	12%
B 校	93%	90%	82%	84%
C 校	53%	57%	27%	27%
D 校	58%	48%	35%	30%

参考（小テスト）……20分

次の2次関数の頂点の座標を求めさらに，そのグラフを書け。

(1) $y=2x^2+1$

(2) $y=-x^2+6x-9$

(3) $y=2x^2+5x+10$

(4) $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$

問題の解き方を分析すると，各校において次のような傾向が見られた。

（傾向1）……(1)(2)のような比較的計算が簡単な問題は，平方完成を用いる方法と座標軸の平行移動による方法とで正答率に大差はなかった。

（傾向2）……(3)(4)のような，平方完成が難しい問題では，明らかに座標軸の平行移動による方法の方が正答率が高く，答案の計算間違いが少なかった。

（傾向3）……平方完成による方法は，とかく計算間違いの多い点が難点であり，$y=a(x-p)^2+q$と変形したあと，これが$y=ax^2$のグラフを平行移動したものであることを幾何的に把握している生徒は非常に少なかった。

（傾向4）……座標軸の平行移動を用いる方法では，座標変換　$X=x-p$，$Y=y-q$と$y=ax^2$のグラフの平行移動との関係を理解している者が少なかった。

7. 研究の成果

放物線を身近なものとしてとらえることが出来たかという点について，生徒から寄せられた感想の中から主なものを取り上げてみる。

(1) 放物線を書くことは困難だと思っていたが，簡単な作業で書けることにおどろいた。

(2) 直角に直線を書くことによって，曲線が書けることが不思議だと思った。また，光の屈折などについても知ることが出来た。

(3) グラフは難しくややこしいと思っていたが，簡単に書けたり，折り紙を折ることで形が浮き上がってくるので，2次関数が身近に感じられた。

アンケート調査の結果，7割以上の生徒が，証明を難しいと感じた様である。

その最大の理由は，短時間で解決を求めたことにあると思われる。証明に使った幾何的性質は，合同条件，円に内接する四角形についての性質，接線条件であり，全て中学校で学んだ基本的性質のみである。基本的性質を明示しておいて証明に向かえば十分理解が得られると思われる。次に今回の研究の主な成果は次のとおりである。

(1) 数学Aに初等幾何が導入された際，それとの橋渡し，更には2次関数との有機的な結びつきとして，この教材を活用できること。

(2) 従来の平方完成による方法を用いると，その計算そのものにとらわれ，$y=a(x-p)^2+q$のグラフが$y=ax^2$のグラフを平行移動したものであることがあまり理解されない難点があるが，座標軸の平行移動を用いると，平行移動の認識がはっきりする。

(3) 平方完成による方法より計算が比較的簡単に済み，特に係数が複雑な分数の場合には有効である。

(4) この方法は，2次関数のグラフに限らず，分数関数，無理関数をはじめ，いろいろなグラフを書くことに応用できる。

8. まとめと今後の課題

具体的な例から発生し発展した幾何学的な考えを歴史の流れの中で見ていくことは，幾何学が文化の発展にどれほどの貢献をしてきたかをかいまみることになる。本研究では，このような幾何学の歴史的経過を重視し，折り紙等の作業や体験を通して数学的な見方や考え方を育てる指導の方法を工夫してきた。今回の指導を通して，2次関数についての理解が深まり，2次関数をより身近な対象としてとらえることができたと考えている。また，座標軸の平行移動を用いてより簡潔に表現する方法は，2次関数だけでなく，他の分野にも応用することが可能であると思われる。

今後，座標変換の指導に十分時間をかけるとともに，幾何学的立場から曲線を考察し，定規，折り紙，刺しゅう等を用いた作業を通して，数学をより身近なもの，より楽しいものとして受入れられるような授業を創造していくことが課題である。

Ⅱ　数列の和と数学的帰納法を関連付け，自ら類推し，帰納的な考え方を育てる指導法の研究

1. はじめに

特殊な事実から一般的な結論・法則を導きだす発見的な方法，すなわち帰納的推論は，人文・社会・自然を問わず，あらゆる科学において用いられる極めて有効な方法であり，科学の発展に欠かせないものである。

数学においても，帰納的推論を使って一般的な法則を推測し，推測した法則を厳密に証明することを行なう。この際に用いられる証明方法が数学的帰納法である。

高等学校における数学的帰納法の学習では，ともすれば帰納的な推論が軽視され，形式的・技巧的な証明の書きかたが中心になっており，数学的帰納法の必要性や有用性を理解できない。そこで，本研究では，帰納的推論を重視し，自ら類推して帰納的に考える力を育てる指導法をテーマに取り上げ，研究を進めることにした。

2. 研究のねらい

現行の多くの教科書において，数学的帰納法は，数列の章の最後に置かれており，その導入に用いられる問題は，既に導かれた「数列の第 n 項までの和」の証明問題が主になっている。そのため，生徒はなぜもう一度同じ問題の証明をするのか，といった疑問をもち，数列への興味を失い，「数学を学習していこうとする意欲と主体的に活用しようとする態度」を養うことが難しい。

そこで，生徒に興味，関心を持たせ，帰納的推論の有用性を理解させるために，具体的な計算をさせる中で，試行錯誤を繰り返しながら等式を推測させ，それを数学的帰納法で証明するという授業を試みた。そのため数列の単元の並べ方を変え，数列の和の公式の指導時に，数学的帰納法を導入することにした。

具体的な手順は次のとおりである。

(1)　実際に計算をして直感的に結果を推測させる。

(2)　結果は推測であり，無限の値に対して成り立っていることを確かめるのは，不可能であることを確認させる。

(3)　自然数 n についての命題が，ある値で成り立っているのを利用して，次の値のときにも

成り立つことを示す。すなわち，数学的帰納法の「 n = k 　のとき成り立つならば n = k + 1 　のときにも成り立つ」を具体的な数値で証明し，数学的帰納法のしくみを理解させる。

(4) 数学的帰納法が形式的にできるようにする。

(5) とかく公式の習得が重んじられる数列の和の指導時に，視覚に訴える教具（模型）を用いて知識の定着を図る。

3. 研究内容

(1) 指導計画

現行教科書の数列における「数学的帰納法」の配置を調べてみると，次の３種類がある。

①等差数列→等比数列→いろいろな数列→漸化式→数学的帰納法　（６社）

②等差数列→等比数列→いろいろな数列→数学的帰納法→漸化式　（３社）

③等差数列→等比数列→数学的帰納法→漸化式　（１社）

①および②においての「数学的帰納法」の例題は，k^2 や k^3 の和や部分分数に分解して求めた分数の和を取り扱っている。従ってこの場合には「数学的帰納法」が等式の証明方法の一つとして，とらえられてしまいやすい。

一番多い６社の配列を次のように変えて指導した。

A社の「基礎解析」の例		今回の指導計画	
第３章　数列　１６時間配当		第３章　数列　１５時間配当	
① 数列とその項	１時間	① 数列とその項	１時間
② 等差数列	３時間	② 等差数列	３時間
③ 等比数列	３時間	③ 等比数列	３時間
④ いろいろな数列の和	３時間	④ 数学的帰納法	３時間
⑤ 数列の一般項の求め方	３時間	⑤ いろいろな数列の和	２時間
⑥ 数学的帰納法	３時間	⑥ 数列の一般項の求め方	３時間

等差数列，等比数列の指導の後で，数学的帰納法の指導をする。まず，等差数列や等比数列でない数列（自然数の３乗の和と２乗の和）の第 n 項までの和を具体的に第５項ぐらいまで計算させ，その数値から第 n 項の式を生徒自身に推測させる。しかし，その具体的な数値から予想した式はあくまで予想である。そこで，この予想が正しいことを「数学的帰納法」

を導入し，証明する。

これによって，高校数学ではあまり経験することのない，「具体的ないくつかの数値から一般的な法則を考える」という数学の発展に欠かせない帰納的推論を体験させ，同時に数学的帰納法の必然性，重要性を理解させる

また，この配列によって多くの教科書が採用している

恒等式　$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$

を用いた自然数の２乗の和を，数学的帰納法と同時に指導できるので，指導時間の短縮にもなる。

(2) 学習指導案「数学的帰納法」（３時間）

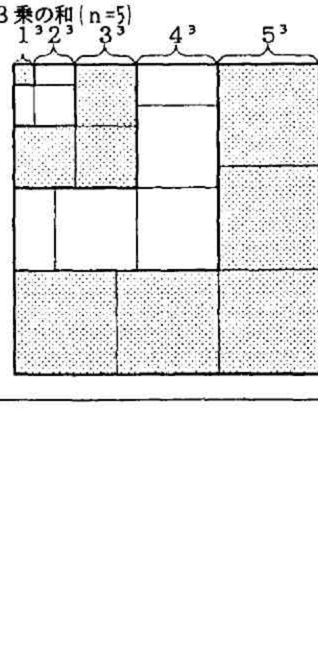
１時限目の目標：既習の等差数列や等比数列でない数列の例として，自然数の３乗の第n項までの和を生徒自身に推測させる。その推測した式は厳密に真とはいえないし，無限の値に対して証明できればよいが，それができないことを理解させる。そこで数値ではなく，文字（ k ）と（ k＋１ ）を用いることによって，無限回の証明をしたことになる「しくみ」を理解させる。

２時限目の目標：自然数の２乗の和を推測させ，「数学的帰納法」の証明方法としての手順を復習し，定着をはかる。

３時限目の目標：練習問題をさせる。「数学的帰納法」の証明方法は等式の証明ばかりではなく，自然数の不等式の証明にも使われることを示す。

この３時間の授業の中で，式の意味の理解を助け，導き出した式の定着を図るために，それぞれ視覚的な模型を準備した。１時限目の「自然数の３乗の和」については，$n=5$までの工作用紙による平面模型によって，自然数の３乗の和が平方数になることを視覚的に示した。２時限目の「自然数の２乗の和」については，$n=5$までの立体模型を６個作製し，６個を組み合わせると，直方体になることを示した。これによって，分母の６の意味をつかませた。練習問題の「奇数の和」は$n=5$までの平面模型によって，奇数の和が平方数になることを示した。３時限目の練習問題も$n=5$の立体模型を３個作製して，３個を組み合わせると，直方体になることを示した。

学習指導案（1時限）

学習内容および学習活動	生徒の反応および留意点
いろいろな数列の第n項までの和 [問] $S_n=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\boxed{nの式}$を求めてみよう （自然数の3乗の和） 実際に計算して予想してみる $S_1=1^3 \quad = 1 = 1^2$ $S_2=1^3+2^3 \quad = 9 = 3^2$ $S_3=1^3+2^3+3^3 \quad = 36 = 6^2$ $S_4=1^3+2^3+3^3+4^3 \quad =100=10^2$ $S_5=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225=15^2$	・等差でも等比でもないので公式は使えない ・順に計算し予想させる ・ある数の2乗になるのは早く気がついた
・　1,3,6,10,15・・・の規則性は？ ・　2,3,4,5・・・と増えている $S_n=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=(\quad)^2$	・2,3,4,5・・・と増えているという答もあった
S_nの3乗をとってみると $S_1=1 \quad = 1$　　これは既習の初項a＝1，d＝1の等差数列の和になっている $S_2=1+2 \quad = 3$ $S_3=1+2+3 \quad = 6$ $S_4=1+2+3+4 \quad =10$ $S_5=1+2+3+4+5=15$ ・ ・ $S_n=1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	・3乗をとったときの数値になっている
よって、$S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$と予想される	・あくまで予想であることを強調
この予想が正しいかどうかn＝6のときを確認する（n＝5までを利用） $\underline{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}+6^3=\left(\frac{5\times 6}{2}\right)^2+6^3$ $=6^2\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2+6\right\}$ $=6^2\times\frac{49}{4}$ $=6^2\times\left(\frac{7}{2}\right)^2$ $=\left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2$　　これは予想した式の右辺にn＝6を代入したもの	・両辺に6を代入するのではなく5までを利用した式変形
これを、n＝7,8,9,・・・と無限に証明しなければならないが無理である 文字を用いてそれができないだろうか（無限回やったことにする） k番目まで成り立つとすると $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$　までは正しい	・同じ計算を無限に続けなければ、証明にならない ・文字kを使ってそれを試みる
k＋1番目（次の数）のときを考えると $\underline{1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3}+(k+1)^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3$ $=(k+1)^2\left\{\frac{k^2}{4}+(k+1)\right\}$ $=(k+1)^2\times\frac{k^2+4k+4}{4}$ $=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$	・kまでの等式を利用した式変形 ・次の数のときが示された ・n＝1の重要性に気付かせる
これは右辺にn＝k＋1を代入したもの よって、k＋1番目のときも成り立つ $\boxed{k \to k+1}$が示されたことによって $1 \to 2$　　kに順に数値を代入することで $2 \to 3$　　無限回証明したことになる $3 \to 4$ $4 \to 5$　　n＝1のときが、出発点になっている $5 \to 6$ $6 \to 7$ ・　　無限回の証明　（Ⅰ）n＝1のときを示す ・　　　　　　　　（Ⅱ）n＝kのとき成り立つとして n＝k＋1のとき成り立つことを示す ・ これを、数学的帰納法という	3乗の和（n=5） 

(2時限)

学習内容および学習活動	生徒の反応および留意点

[問] $S_n = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = \boxed{\text{nの式}}$ を求めてみよう
（自然数の２乗の和）

実際に計算して予想してみる

$S_1 = 1^2 \qquad\qquad\qquad\quad = 1$
$S_2 = 1^2+2^2 \qquad\qquad\quad = 5$
$S_3 = 1^2+2^2+3^2 \qquad\quad = 14$
$S_4 = 1^2+2^2+3^2+4^2 \quad = 30$
$S_5 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$
・
・
$S_n = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 =$

1,5,14,30,55・・の規則性は？

前問のように２乗をとった場合の数値と比較してみると

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	・・・	S_n
$1^2+2^2+3^2+\cdots$	1	5	14	30	55	・・・	
$1+2+3+\cdots$	1	3	6	10	15	・・・	
$\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots}{1+2+3+\cdots}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{30}{10}$	$\frac{55}{15}$		
同上	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	・・・	$\frac{2n+1}{3}$

よって $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots}{1+2+3+\cdots} = \dfrac{2n+1}{3}$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots = \frac{2n+1}{3}\times(1+2+3+\cdots+n)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots = \frac{2n+1}{3}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots\text{①}$$

①を数学的帰納法で証明する

（Ⅰ）$n=1$のとき

①の左辺$=1^2=1$，①の右辺$=\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$

∴左辺＝右辺，①は$n=1$のとき成り立つ

（Ⅱ）$n=k$のとき①が成り立つとすると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$n=k+1$のとき

$$\text{①の左辺} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$= (k+1)\left\{\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right\}$$
$$= (k+1)\frac{(2k^2+7k+6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\text{①の右辺} = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

∴左辺＝右辺，①は$n=k+1$のときも成り立つ

（Ⅰ）（Ⅱ）より①はすべての自然数nで成り立つ

[練習] $1+3+5+\cdots+(2n-1)=$ を予想し、その結果を数学的帰納法で証明せよ

生徒の反応および留意点

・差をとって、その差が平方数になっていという意見もあったが、式にすることができなかった。

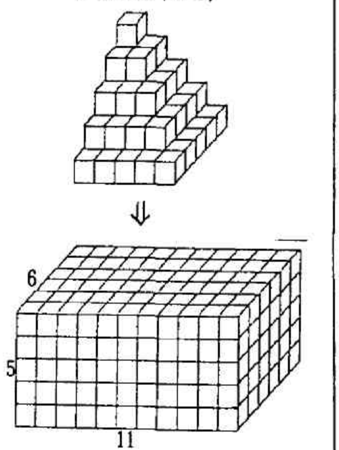
・この規則性はなかなかでてこない

・左の表をプリントで用意し数値を入れさせる

・いきなり、分数にしてはあるが、試行錯誤の結果であることを説明

・出発点である$n=1$を強調

2乗の和（n=5）



・$n=5$のときの立体模型を６個見せて、組み合わせる直方体になることを示す

・すぐに予想できた

（3時限）

学習内容および学習活動	生徒の反応および留意点
(see below)	(see below)

学習内容および学習活動

［練習］ $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=$ を予想し、その結果を数学的帰納法で証明せよ

S_1からS_5までを計算し表にし、自然数の和と比較してみると

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots$	2	8	20	40	70	…	
$1+2+3+\cdots$	1	3	6	10	15	…	
$\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots}{1+2+3+\cdots}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{20}{6}$	$\frac{40}{10}$	$\frac{70}{15}$		
同上	$\frac{6}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{14}{3}$	…	$\frac{2n+4}{3}$

よって $\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots}{1+2+3+\cdots}=\dfrac{2n+4}{3}$

$$
\begin{aligned}
1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots &= \frac{2n+4}{3}\times(1+2+3+\cdots+n)\\
&= \frac{2n+4}{3}\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

①を数学的帰納法で証明する（略）

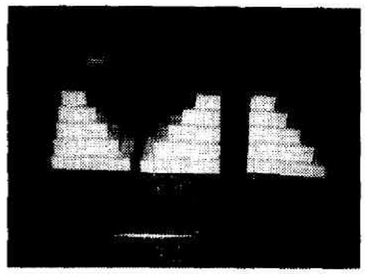
［練習］ $a>0$で、nが2以上の自然数のとき、不等式

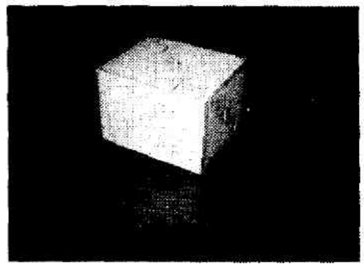
$$(1+a)^n>1+na$$

が成り立つことを証明せよ。

生徒の反応および留意点

・$n=5$のときの立体模型を3個組み合わせると、直方体になる





4. 分析と考察

研究授業では，等差数列，等比数列はそのまま教科書どおりに進め，等比数列のすぐ後に指導案の内容で授業を行った。1時限目の3乗の和は何とか気が付いてくれたが，2時限目の2乗の和は，意見は出るのだが，それを式で表わすことができず，時間だけがたってしまった。ヒントとして学習指導案の中にあるような表のプリントを配布した。

2乗の和を推測するのは，やはり難しいようである。

教科書どおりに数列の最後に数学的帰納法を指導したクラスと，本研究の指導によるクラスの両方に，中間考査において下記のような同一の問題を出題し，定着の様子をみた。

問　次の数列の和がすでに予想されているものとして，予想が正しいことを数学的帰納法で証明せよ

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{3}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

その結果，配列が教科書通りのクラスと本研究の指導クラスとでは，後者のクラスの方が正解率が高かった。教科書通りのクラスは，数学的帰納法を中間考査の直前に学習し，研究授業のクラスでは，数学的帰納法を中間考査のかなり前に学習しているということを考えても，数学的帰納法の定着率が良かったといえる。

指導案の2時限目の〔練習問題〕(奇数の和)を帰納法の指導の後，Σ計算の指導の際に解いた。中間考査後に研究授業実施クラスにおいて，Σ計算と数学的帰納法についてのアンケートをとった。その結果，数学的帰納法の方がΣ計算よりも，解答が分かりやすいと答えた生徒が2倍以上いた。

5. 研究の成果と今後の課題

成果として以下のようなことがあげられる。

(1) 「帰納的な考え方を育てること」については，有限な値に対しては，計算で確かめられるが，無限の値に対しては計算で確かめることは不可能であり，証明しなければならないという意識が生まれた。導入部分において，生徒はいつになく反応が良かった。受け身ではなく自ら考えながら学習するので興味をもったものと思われる。

(2) 「視覚的に訴える教具の利用」については，生徒は大変興味を持ったようである。面白かったという生徒が多かった。中間考査の結果をみると公式の定着率が例年に比べて高かった。これは，視覚的な教具を生徒に提示したためと思われる。

(3) 「主体的に意欲をもって学ぶ態度を養うこと」については，授業に対して意欲的に取り組んでいた生徒が普段より多かった。全体に“考えている”という雰囲気があった。普段発言しないような生徒も積極的に発言していた。これは，導入部分が$n=5$までの計算なので誰でも計算できるし，自分で推測する面白さのためだと思われる。自分から公式を導けた，発見できたという達成感や満足感も味わったようである。

(4) 「数学的帰納法の定着」については，進度の関係で研究授業が1校でしかできなかったので，あまり比較対象できないが，中間考査では例年に比べてよくできていた。前述のアンケートの中でも，3分の1近くの生徒が「数学を学んでいる」と感じており，強く興味を持ったことがわかる。

今後の課題としては，2時限目の「自然数の2乗の和」の指導時に，ヒントとして表を与えたが，帰納的な考え方のもつ発見的要素を認識させるには，自ら発見するのが，一番望ましい形である。これからも発見しやすい問題・指導法の工夫を考えていきたい。

Ⅲ　パソコンを活用した数学Cの指導

1. はじめに

「数学C」は，今回の学習指導要領の改訂で新しく設けられた科目であり，その目標は「応用数理の観点から，コンピュータを活用して，行列と線形計算，いろいろな曲線，数値計算または統計処理について理解させ，知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数理的に考察し，処理する能力を伸ばす。」と示されている。

コンピュータを活用するとは，具体的には，各学校に導入されているパソコンを用いて，数値計算を行ったり，グラフを描いたりすることであるととらえている。

そこで，実験的な作業を積極的に実行することにより，数学の理解を図るという観点から，次の２つの項目について研究することにした。

Ａ．相関係数（統計資料の整理）

Ｂ．極座標と極方程式（いろいろな曲線）

2. 研究・実践例

A. 相関係数の指導

〔1〕研究のねらい

記述統計の学習では，コンピュータを利用する価値は大きい。電卓とは違い，データの入力ミスは検索しやすく，１度に多くの自動演算が可能であり，計算は瞬時に終わる。また，グラフィック機能を利用することにより，集団の持つ特徴を視覚化することができる。

本研究は，このコンピュータの利点を生かしつつ，２変量の間にある関係を数量化・図式化する学習を通して，次の３つの能力を養い伸ばすことをねらいとした。

(1) 実験・観察・調査などから得た情報や資料の整理を，コンピュータを利用して行える。

(2) 集団の数量的特徴を知るための適切な処理と表現法および的確な分析と判断をすることができる。

(3) 統計的処理をしたデータから，客観的・合理的な情報を引き出し，ある対象に対して何らかの推理・予測ができる。

また，理論的な側面は，実験的方法（シミュレーションを繰り返し行う）で説明することに重点を置き，あまり深入りしないよう留意した。

〔2〕 研究内容・方法

(1) 実験・実習の作業を簡略化するために，表計算ソフトの有効性を積極的に活用する。

(2) 身近な１０組の整数値データ（身長と体重の関係）を用意し，相関図を描きデータの持つ特徴をつかませる。

(3) 相関係数は，「標準化されたデータの共分散」として定義し，それを算出するための処理手順を学習する。

(4) 相関係数の持つ意味をより深く理解させるために，相関図と相関係数が瞬時に表示される市販のシミュレーションソフトを活用し，操作・実験・観察を繰り返し試行することで，生徒自らがその性質・法則を発見できるよう指導する。

(5) 変数ｘから変数ｙを予測する直線を考えさせ，統計処理の良さが実生活・実社会に役立ち，自らが応用していく能力を高めさせる。ここでは，回帰係数の理論には深入りせず，「ｘとｙの関係を最も良く表現している直線」の描き方として回帰直線の公式を提示し，活用できるようにする。

(6) 生徒自らが興味・関心を持つ『身近にある生の資料』を収集させ，課題研究として「相関係数」と「予測する直線」についてレポートを作成させる。また，研究内容と考察を発表させ，分析・判断等について考えていく。

〔3〕 学習指導案

１．指導単元　相関係数
２．指導目標　相関係数の持つ意味を理解する

	指導内容	指導上の留意点　【１時間目】
導入10分	(1) 相関図を描くこと ２変数ｘとｙのデータの間に関係があるかどうかを，視覚的にとらえさせるために相関図を描かせる。	帯状データの相関図が得られるので，２変数ｘとｙの間に直線的な関係があることを観察させる。 「ｘとｙの間には相関がある」という。
展開40分	(2) 相関係数を求めること 標準化されたデータから相関係数の公式を導く。 $r=\dfrac{S_{xy}}{S_x S_y}$ 相関係数の計算のために，ｘとｙの偏差，偏差平方，偏差積の平方を表計算ソフトを利用して求めさせる。 正の相関，負の相関，相関がない，$-1 \leqq r \leqq 1$	共分散s_{xy}が２つの変数の直線的な関係の強さを表すことを理解させる。この時，偏差の積$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$の値の正負を考えるがｘｙ平面を４つの領域に分けた図と偏差積の計算表とで，丁寧な説明によって指導する。 表計算ソフトの関数 @SUM(合計),@AVG(平均)を利用して求めさせる。ただし，標準偏差の関数は使用しない。 相関係数は，２つの変量ｘとｙの間の直線的な関連性の「方向と強さ」を数量的に表している。 共分散の和の平均から，実用的な相関係数の公式を導く。

	指導内容	指導上の留意点 【2時間目】
展開40分	(3) 相関係数のシミュレーション コンピュータによるｼﾐｭﾚｰｼｮﾝによって，相関図における点の散らばり具合と相関係数のおおよその値の目安を，数学実験的に理解させる。	ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝの実行前に，その意味と目的についてよく指導しておく。 すべての点が一直線上にあるときのみ，r＝－1，1になることを実験的に感じとらせる。－1≦r≦1の証明はいらない。 相関係数の値から相関の程度を説明するのはいがいに難しい。例えば，相関係数0.7の関係の方が相関係数0.6の関係よりも，2変数間の関係がより強いというように相対的にとらえさせる。また，相関図において，「直線状の帯」の傾きと，相関係数の大きさは無関係であることを理解させる。
	(4) 練習問題	テキストの［練習1］(1)をやるよう指示する。(2)は時間のあるときに練習しておくよう伝える。
	(5) 課題研究 生徒自身に用意させた2変数xとyのデータについて相関係数求めさせる。	生徒が興味・関心を持っている事象について「生のデータ」を収集させ相関係数を求めさせる。実習は次回行う。
まとめ10分	(6) 相関係数の解釈について 曲線的な関係，相関関係は因果関係ではない。 （因果連鎖，疑似相関） 具体例を示す。	相関係数の解釈については，いろいろと誤解する場合も多いので具体的な例をあげて指導する。 ・変数x，yの曲線的な関係は，相関係数では表現できない。 ・2つの変数の相関関係は必ずしも2つの変数の因果関係を示すものではない。

相関関係

〈表1〉は，ある10人の生徒の身長と体重を測定した結果です。このデータから相関図を求めよう。

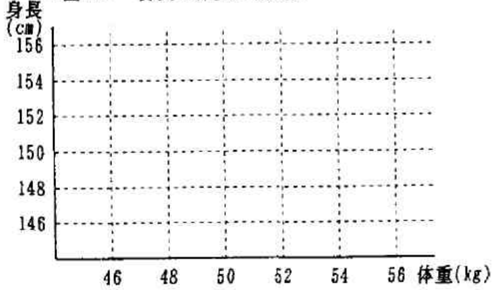
＜表1＞ 身長と体重のデータ

変数＼生徒	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
y 身長(cm)	149	147	146	154	153	145	151	149	151	155
x 体重(kg)	48	47	45	53	54	46	49	51	52	55

［実習1］ 相関図を描こう

〈図1〉に身長と体重の関係を示す相関図を描いてみよう。

＜図1＞ 身長と体重の相関図



相関係数

相関係数の公式を導こう。

n個の，xの標準化されたデータとyの標準化されたデータの積の平均を考える。

$$\frac{1}{n}\sum\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i-\overline{y}}{s_y}\right)=$$

データの標準化

データx，yの標準化

$$\frac{x_i-\overline{x}}{s_x},\quad \frac{y_i-\overline{y}}{s_y}$$

	平 均	標準偏差
y 身長	150(cm)	3.32
X 体重	50(kg)	3.22

＜表2＞

	y身長(cm)	x体重(kg)	身長の標準化されたデータ	体重の標準化されたデータ	標準化されたデータの積
A	149	48			
B	147	47			
C	146	45			
D	154	53			
E	153	54			
F	145	46			
G	151	49			
H	149	51			
I	151	52			
J	155	55			
				合計	
			相関係数 ←	平均	

このように，x，yの標準化されたデータの積の和を平均した値を相関係数と呼びます。

公式1 相関係数：r

r＝

予測する直線（回帰直線）

公式2　xからyを予測する直線の方程式

$$y-\overline{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}(x-\overline{x})$$

s_x^2 ：xの分散

s_{xy} ：xとyの偏差積の平均

公式2は，展開して整理すればy＝ax＋bの形で表すことができます。『回帰分析の結果』に表示されている「X係数」「Y切片」は，それぞれa，bの値に対応します。

回帰分析でゲームをしよう　　〈表3〉参照

ファイルから「GAME.WJ2」を呼び出してくだい。このデータは小田急線の沿線にチェーン店を持つあるスーパーの1日の販売高を示したものです。販売高はいろいろな条件に依存します。画面に示されたデータを使って販売高を予測するのに最も適した式を作りたい。

予測式は，4つの変数から2つを適当に選んで $y=a_0+a_1x_1+a_2x_2$ と考えて下さい。予測の精度は，R2乗（決定係数）の値が1に近くなるほど高くなります。チャレンジは3回。あなたはどれだけ1に近づけるでしょうか。さあ，始めましょう！

「表示画面の説明」　回帰分析の結果：

Y切片：予測する直線とy軸との交点→bの値

X係数：予測する直線の傾き→aの値

R2乗：相関係数の2乗（これを決定係数という）

公式3

予測する直線の方程式　　　$y=(\text{X係数})\times x+(\text{Y切片})$

<表3>

	変数	y	x1	x2	x3	x4
	変数名	販売高	乗降客数	周辺人口	取扱品目	駐車台数
1	伊勢原	129	142	13.5	101	120
2	百合ヶ丘	202	186	16.7	168	152
3	町田	224	224	20.3	158	160
4	下北沢	180	174	17.2	106	145
5	藤沢	168	202	22.0	85	140
6	経堂	165	145	12.3	103	150
7	代々木上原	215	177	18.6	192	180
8	小田原	272	245	22.5	290	150
9	海老名	204	174	17.3	172	124
10	梅ヶ丘	131	82	9.8	162	80
11	成城学園前	259	212	24.5	285	140
12	大和	242	254	23.8	172	110
13	本厚木	252	249	22.6	224	120
14	大秦野	161	118	19.2	146	140
15	相模大野	169	164	17.4	152	160

〔4〕 課題研究の内容と生徒の感想

(1) 生徒が実際にデータ解析を行った研究内容は次のようなものである。

① 乗用車の販売台数の伸び率の予測とその要因

② 勤労者一世帯当りの可処分所得と家計収支の分析

③ 都道府県別の病院概況および医師数の回帰分析

④ 化学工業工程の収率と製造要因のデータ分析

⑤ プロ野球選手の年俸の予測とその選手の野球成績

⑥ ある組の男子のローレル指数と体格の統計解析

⑦ 世界各国の軍事力状況と防衛費のデータ解析

(2) コンピュータ統計処理に対する生徒の感想は，次のようなものである。

① 統計コンピュータでは，自分の生活や身近なことを，データを通して知ることができるので，今までの数学授業よりも楽しい。作業をするので飽きない。

② いろいろな変数のデータを関連させて見ることで，一見，関係なさそうなものどうしでも，お互いに深く関係しあっていることが理解できた。

③ 教室での数学授業よりも，コンピュータによる数学授業の方が分かりやすいし，楽しい。コンピュータ数学は，勉強のやりがいがあると思う。

④ 授業が進むにつれてだんだん便利なものだと分かってきた。統計処理は，これから社会のいろいろな所で役に立っていくと思う。

〔5〕 まとめと今後の課題

ほとんどの生徒は，黒板での統計授業よりもコンピュータでの統計授業の方が「よくわかる，楽しい」と肯定的であり，統計処理の中の相関分析と回帰分析の実用性を十分に認識し，「役に立つ」と感じている。また，生徒それぞれの能力に応じて，「主体的に，マイペースでやれる」と，成就感を持ったようである。「かたい」関数関係ではない「やわらかな」回帰関係の数式化に驚きと興味を持った生徒もいた。

また，1変数ではない，現実的な多変数関数を扱う意義も大きい。生徒からは，1年間使えるテキストが欲しいという声があった。数学Cの統計処理は，文科系志望の生徒，数学嫌いの多様化した生徒に最適な「使える数楽」であると考える。教科書的ではない，社会人にも気楽に使えるような高校生用の「データ解析テキスト」を作ってみたい。

B．極座標と極方程式の指導

〔1〕 研究のねらい

数学教育へのコンピュータの活用は，他の教科に比べ，導入しやすい側面を持っている。具体的には，演算の高速度を利用した数値解析への利用，グラフィック機能を利用した数学的概念や図形の視覚的イメージの理解と定着への利用が，2大利点と考えられる。

今回，研究題材として取り上げた数学C「いろいろな曲線」は，上記した2大利点の内，後者の立場でのコンピュータ利用によって，より大きな教育的効果の期待できる分野である。

本研究では，「いろいろな曲線」の内，「極方程式で表される曲線」を生徒に体験させることを目的とするCAIソフトを開発し，さらに，その利用方法および学習効果を研究・考察することをねらいとした。

〔2〕 研究内容・方法

(1) 「極方程式で表された曲線」を体験させるCAIソフトを作成する。

なお，授業で取り上げる曲線は以下のものとした。

① アルキメデス螺線　$r = a\theta$

② 対数螺線（等角螺線）　$r = a^{\theta}$

③ レムニスケイト（連珠形）　$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

④ カージオイド（心臓形）　$r = a(1 + \cos\theta)$

⑤ 正葉線　$r = a \cos 2\theta$

（作成上の留意点）

① 描画速度を変更できるようにする。

② 描画範囲を変更できるようにする。（座標軸の移動，描画ウィンドウの変更）

③ 曲線を重ね描きできるようにする。

④ 描画色を変更できるようにする。

⑤ 描画を一時的に中断できるようにする。

(2) 上記の点に留意した自作ＣＡＩソフトを実際に実行させ，不備な点を修正・補強していく。

(3) 自作ＣＡＩソフトを利用した指導計画を作成し，授業実践を行う。

(4) 授業についての生徒へのアンケートを実施し，結果について考察する。

〔3〕 授業展開（学習指導案）

Ｉ．教材名　　「極座標で表されたいろいろな関数」

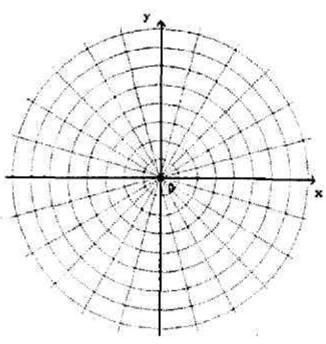
II．単元の指導目標
新学習指導要領における「数学Ｃ」の単元として、現行のカリキュラムにはない「極座標」「極方程式」を紹介し、直行座標系では表せない曲線が極座標系では表すことができることを実習を通して理解させる。

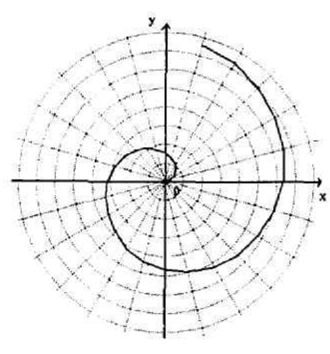
III．指導計画
① 極座標
② パソコン教室およびパソコンの使い方
③ 極方程式で表された曲線（アルキメデスの螺線）⇒本時
④ 極方程式で表された曲線（いろいろな曲線）

IV．本時の指導目標
○配付済のグラフ用紙に「ｒ＝θ」の点をプロットさせる。
○曲線上の点が意味することを理解させる。
○自分で考えて、実習が行われるように配慮する。

V．本時の展開

	学習内容	生徒の作業	指導上の留意点	時間
導入	前時に配付したプリントを確認する。 フロッピーを配付し、パソコンの電源を入れる。 グラフ用紙に手順に従って点をプロットさせる。（アルキメデスの螺線）	前時に指導したとおり正しく取り扱う。 定規がなくても、グラフ用紙で概形はかけることを確認する。	ＰＣ－ＮＥＴで確認する。 書画カメラを利用する。15　の時を説明し、さらに30　の時を説明する。（机間巡視）	１０分
展開	例示用の画面を見る。	プロットしたグラフとパソコン画面との比較をする。	「PCURVE21」を起動し、途中で停止させ、曲線上の点について説明する。	7分
展開	グラフ用紙にカージオイドをプロットさせる。	アルキメデスの螺線の時と同様の作業をする。	「PCURVE21」をモニターで描く。生徒の進行状況に合わせて描画速度を変化させる。	8分
発展	マニュアルに従って、コンピュータ実習を進める。	「ｒ＝θ」の描き方については、説明に従って実習する。	はじめは、順次説明し、あとは自由に描画させる。	２０分
まとめ	次回は、様々な曲線を描き記録することを予告する。			5分



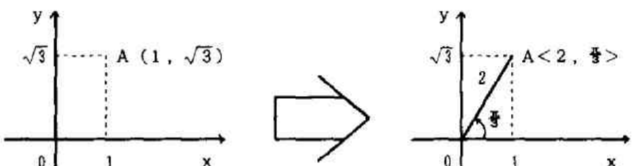


8　極方程式で表される曲線

［1］　極座標

平面上の点を表す方法について考えてみよう．今までは、平面上の点は<図1>のように直交座標を用いて表してきたが、見方を変えると、<図2>のように、「x軸の正の向きとのなす角」と「原点からの距離」によって、平面上の点を表すこともできる。

これを、極座標　という。したがって、この極座標で表すと、<図1>の点　A $(1,\ \sqrt{3})$ は A $<2,\ \frac{\pi}{3}>$ と表される。

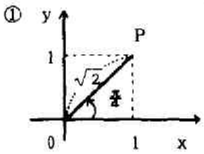


<図1>　<図2>

※　ここでは「なす角」が弧度法で表されていることに注意すること

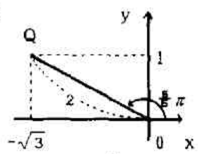
例

①



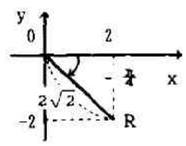
P $<\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}>$

②



Q $<2,\ \frac{5}{6}\pi>$

③



R $<2\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4}>$

［問1］　直交座標で表された点を極座標で表せ。

①　A $(\sqrt{3},\ 1)$　　②　B $(2,\ 0)$　　③　C $(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

［2］　極方程式

直交座標では、x と y との関係式によって、いろいろな曲線を表すことができたが、極座標でも r と θ との関係式によって、いろいろな曲線を表すことができる。これを 曲線の極方程式 という。

◎　$r=\theta$　で表される曲線を描いてみよう。

<手順1>　次の表を完成しなさい。
（但し、r は小数第3位を四捨五入せよ）

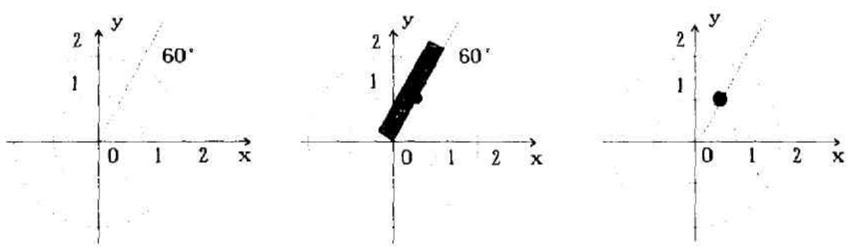
θ (deg)	0°	30°	45°	60°	90°
θ (rad)					
r					

<手順2>　配られた数表を用いて、次の表を完成しなさい。

θ (deg)	0°	15°	30°	・・・	405°	420°	435°
θ (rad)				・・・			
r				・・・			

<手順3>　配られたグラフ用紙に表の点をとりなさい。

（例）　$\theta=60°$、$r=1.05$　の点 A $<1.05,\ \frac{\pi}{3}>$ の図示



60° の方向を定める　⇨　定規で 1.05 をとる　⇨　点を図示する

<手順4>　図示された点をなめらかな曲線で結びなさい。

<考察>　さらに、角度を大きくしていくと、曲線はどうなるのだろうか？　考察しなさい。

この実習で描いた曲線 $r=\theta$ は「アルキメデスの螺線」と呼ばれている。（ただし、一般形は $r=a\theta$ である。）

［問2］　$r=4\ (1+\cos\theta)$　で表される曲線（カージオイド：心臓形）を実習の要領で、描きなさい。

コンピュータ演習　「極方程式で表された曲線（生徒実習用）」

○　コンピュータを使って、極方程式で表されるいろいろな曲線を描いてみよう。

○　使用説明書に従って、実習を進めなさい。

(1)　まず、アルキメデスの螺旋（$r=\theta$）をもう一度描いてみよう。

(2)　アルキメデスの螺旋の一般形は、$r=a\theta$　である。このaの値をいろいろと変化させてみよう。

(3)　同様に、カージオイド（$r=a(1+\cos\theta)$）についても、いろいろと試してみよう。

(4)　その他の曲線についても、どうなるか確かめてみよう。

コンピュータを利用した授業に関するアンケート

項目		A高校 人数	A高校 %	B高校 人数	B高校 %
1．以前に、コンピュータの操作をしたことがありますか。	①ある	65	57．0%	88	63．1%
	②ない	49	43．0%	76	4·8．9%
2．コンピュータの操作はうまくいきましたか？	①全く問題なくうまくいった	11	9．6%	27	16．7%
	②まあまあうまくいった	86	75．4%	122	75．3%
	③うまくいかなかった	17	15．0%	13	8．0%
3．コンピュータでの授業と教室での授業では、どちらが理解しやすいですか？	①教室での授業では理解できない所があるが、コンピュータを使った授業ではほとんど理解できた	10	8．9%	23	14．2%
	②教室での授業よりはコンピュータを使った授業のほうが理解できた	54	47．4%	72	44．5%
	③どちらの授業も変わらない	32	28．1%	41	25．6%
	④教室での授業のほうが理解しやすい	18	15．7%	25	15．5%
4．コンピュータを利用した学習で特に印象に残ったことは何ですか？	①画面がカラフルで、理解しやすかった	22	19．3%	40	24．7%
	②簡単な操作で、グラフが描けた	37	32．5%	84	51．9%
	③性格なグラフが描かれ、特徴がよく分かった	52	45．6%	51	31．5% %
	④キーの操作が面倒くさい	13	11．4%	8	4．9%
	⑤特にない	7	6．1%	14	8．6%
5．これからもコンピュータを使用した学習をしたいですか？	①はい	90	78．9%	132	81．5%
	②いいえ	9	7．9%	5	3．1%
	③どちらともいえない	15	13．2%	25	15．4%
6．（a）今回コンピュータを使用して極座標を学習したことで、極座標がどういうものか分かりましたか？	①大変よく分かった	15	13．2%	15	9．2%
	②だいたい分かった	76	66．7%	114	70．4%
	③よく分からなかった	23	20．1%	33	20．4%

7．（b）実際に極方程式であらわされた曲線をコンピュータで描いてみてどう思いましたか？
- 手でプロットするときに比べ、曲線がきれいで正確だったので、分かりやすかった。
- ちょっと数字を変えるだけでグラフが変わっていくのがおもしろかった。
- 遊びのようでよかった。数学に対する認識が少し変わった気がする。
- 手書きより、グラフの印象を強くもてた。
- とても分かりやすく、複雑な方程式もすらすらと解くコンピュータに驚いた。
- このままずっとパソコンの授業を続けたい。
- 操作に慣れ、コンピュータが分かってくるとおもしろい。
- 操作に夢中で、何をやっているのか分からなかった。
- 手で描かなくてもいいので楽だった。でも、頭には入っていない気がする。
- 正確には描けるけれど、それだけではつまらない。
- もっと事前の学習をしておきたかった。
- 目が疲れた。
- おもしろかった。

〔4〕 授業実践の考察

都立高校へのコンピュータ導入が始まってから数年が経過したこと，家庭へのパソコンの普及など，生徒がパソコンに接する機会は増えている。今回，授業実践を行った２校ともに，半数以上の生徒が以前にコンピュータを操作した経験を持っていた。しかしながら，全生徒がパソコンを操作できることが授業の前提となると考え，指導計画にもある通り「パソコン教室およびパソコンの使い方」を１時間指導した。その結果，パソコンを用いた授業がある程度生徒に受け入れられた。

次に，自作ソフトによる指導に移った。導入として，極座標用グラフ用紙に，実際に点をプロットして，アルキメデス螺線（ $r=\theta$ ）とカージオイド（ $r=4(1+\cos\theta)$ ）を描いてみることにした。曲線を手作業で描くという作業は，内容理解には重要な位置を占めているが，今回は，その後のパソコンによる曲線描画の正確さ・美しさ・速さ・容易さといったパソコンの特長を強く印象づける導入となった。

パソコンを用いていろいろな曲線を描く作業を通して，「おもしろかった」，「数学というものの認識が少し変わったような気がします」，「手書きより，グラフの印象を強く持てた」等の感想や，約８割の生徒が「極座標」や「極方程式」を『理解できた』と答えていることを考え合わせると，パソコン利用の成果は大いにあった。

ただ，「おもしろかったが頭に入っていない」という感想や，「教室での授業の方が理解しやすい」と答えている生徒が２校とも約１５％いる。これは，コンピュータに対して抵抗がある生徒がまだまだいるということを示している。

3. おわりに

授業は教師が生徒と向かい合う中で，その方法を十分工夫することによって成り立つものである。要は，パソコンの活用の仕方の問題であるが，授業にパソコンを活用する視点として，あくまでも補助的な使用に限定し，導入やまとめの部分で，パソコンの特長を活かす授業を想定するということで，研究を開始した。

研究授業の結果，当初のねらいは一応達成できたと考えている。パソコンの使用が日常化されていない現状で，物珍しさもあったが，動機付けには十分であった。特に，データの変更による変化が即時に確認できる点は，生徒に好評であった。

これは，授業の到達目標に留意し，パソコンの特徴に注意して使用すれば，パソコンが有用な道具となることを示唆しているものと考えられる。