高等学校

平 成 6 年 度

教育研究員研究報告書

数　　学

東京都教育委員会

平成６年度教育研究員（数学）名簿

班	研究テーマ	学校名	氏名
I	２次関数のグラフを活用した，２次方程式，２次不等式の指導方法の工夫	都立千歳丘高等学校 都立玉川高等学校 都立砧工業高等学校 都立桜水商業高等学校 都立水元高等学校	須藤　淳 齋藤東彦 渡辺　穣 富田道子 小山留勝
II	具体例を通して，数の並び方の規則性を発見することにより，数学的な見方や考え方を育てる指導 －自然数の列を題材にして－	都立明正高等学校 都立光丘高等学校 都立大泉学園高等学校 都立日野台高等学校 都立北多摩高等学校	本多浩一 松村宏一 江本敏男 酒井　琢 田中都明
III	パーソナルコンピュータを通して，確率の考え方を理解させる指導 －シミュレーションとワークシートの効果的利用－	都立大森東高等学校 都立大山高等学校 都立牛込商業高等学校	松井智徳 吉岡良一 金田　隆

担当　教育庁指導部高等学校教育指導課指導主事　　吉野恒夫

主題　基礎・基本の定着を図り，学習意欲を高める個に応じた指導方法の工夫

目　　次

Ⅰ　2次関数のグラフを活用した，2次方程式，2次不等式の指導方法の工夫

1．はじめに

高等学校へ入学してくる生徒の多様化にともない，従来の指導法だけでは対応できなくなってきており，生徒一人一人の個に応じた指導を充実させることが求められている。

本研究では，「数学Ⅰ」において，変化するものの代表としての「2次関数」を取り上げ，新しい学力観に立って，数学的な見方や考え方のよさを理解させる指導方法を工夫した。また，研究に当たっては，学習の主体を生徒に置き，生徒自らが興味を持って学習に取り組めるよう，中学校の内容との関連にも留意し，指導内容・方法の工夫・改善を図り，その実践を試みた。

2．研究のねらい

学習指導要領では，2次関数の指導について，従来とは大きく異なり，グラフを指導の中心に据えている。したがって，本研究でも変化するものの代表としての2次関数の理解を深めるため，グラフを積極的に活用し，2次方程式，2次不等式の解法の指導の工夫を試みた。また，多様化した生徒の実態に的確に対応できるよう複数の指導方法を工夫した。

(1)　2次関数のグラフのかき方

中学校での指導の流れを踏まえ，生徒の実態に応じて，3通りの方法でグラフの指導を行う。

(2)　グラフを利用した2次方程式の指導

実数解の存在について，グラフを利用して認識させる工夫をする。

(3)　グラフを利用した2次不等式の指導

不等式の解法を関数のグラフとの関連を通して指導する。

3．研究内容・方法

(1)　中学校での内容をどの程度理解しているかを知るため，グラフについての事前調査を数校で実施する。事前調査はアンケート調査方式とし，中学校の内容の復習を中心とする。

(2)　グラフのかき方については3通りの指導方法を考え，生徒の実態に応じて指導する。

(3)　2次方程式，2次不等式については，複素数を使わず，グラフを活用することを中心に指導する。

(4)　座標軸のとり方を3通り用意し，グラフのかき方を正しく理解できたかどうかを知るため，各学校で評価テストを実施する。

(5)　評価テストの結果に基づき，3通りの方法について，それぞれの長所や短所を分析し考察する。

4．指導方法

(1)　2次関数のグラフのかき方

生徒の実態に応じて指導した3通りの方法と各々の方法についての長所，短所を以下に列挙する。

ア　平方完成によるもの（その1）

中カッコを使用する方法：$y=a\{(x-p)^2-p^2\}+q$

【長所】

- 右辺だけをきちんと計算すれば，そのまま陽関数の形となる。
- 中カッコ，小カッコの使い分けの練習になる。

【短所】

- カッコが多い為，計算が繁雑になり，計算ミスが多くなる。それにともない，理解することが困難になることが多い。
- 基本的な計算技術の習得が要求される。

イ　平方完成によるもの（その2）

x^2 の係数を1にする方法：$\frac{1}{a}y=x^2+bx+c$

（例）$y=3x^2+6x-5$

$$\frac{y}{3}=x^2+2x-\frac{5}{3}$$

$$=(x+1)^2-\frac{8}{3}$$

$$\therefore y=3(x+1)^2-8$$

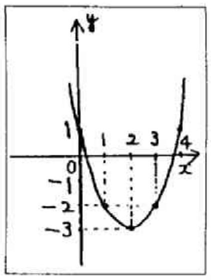
【長所】

- 中カッコがない為，計算ミスが少ない。
- $y=x^2+bx+c$ の場合の平方完成については理解度がやや高い為，かなり複雑な式まで指導することが可能である。
- 最終的に計算ミスをしても，途中の式まできちんと計算することが可能である。

【短所】

- 最後の行で，a を掛け忘れることが多い。
- 中カッコ，小カッコの使い分けの練習ができない。

ウ　$y=ax(x+b)+c$ によるもの



（例）$y=x^2-4x+1$

$=x(x-4)+1$

①　2点（0，1），（4，1）を通る。

②　頂点は，$x=\frac{0+4}{2}=2$ 上にあるので，

y座標は，$y=2\cdot(2-4)+1=-3$，ゆえに頂点の座標は$(2,-3)$

③　$x=1$のとき，$y=1\cdot(1-4)+1=-2$

よって，点$(1,-2)$を通る。又，対称性により点$(3,-2)$も通る。

④　5点をとってあるので，グラフがかける。

【長所】

・短時間で指導が可能であり，生徒の達成感がかなり得られる。

・平方完成の指導の必要がない。

・頂点，軸，最大値，最小値が簡単に求められる。

【短所】

・頂点から，最大値，最小値を求める為には，1段階必要である。

・平行移動の概念を捉えることができない。

・2次方程式，2次不等式など他の分野への応用はきわめて困難である。

・標準型のイメージが捉えにくい。

(2)　2次関数のグラフと2次方程式

ア　2次関数のグラフと2次方程式

旧の学習指導要領においては，複素数の導入により，2次方程式の解は必ず存在した。しかし，今回の改訂により，数学Ⅰでは複素数を学習しないため，グラフを利用して2次方程式を解くことになる。

2次関数$y=ax^2+bx+c$の頂点の座標は$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$である。したがって，$b^2-4ac$の値の符号によって，この関数のグラフと$x$軸との位置関係が定まり，2次方程式の解の有無が決まる。

イ　2次方程式の解法例

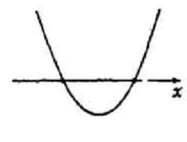
［例1］　$2x^2+3x-1=0$を解け。

［解］　$b^2-4ac=3^2-4\times2\times(-1)=17>0$

よって，グラフは下に凸で，頂点のy座標が負だから

グラフは2点で交わる。

ゆえに，解の公式より　$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$



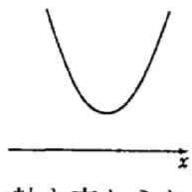
2点で交わる

［例2］　$3x^2-3x+2=0$を解け。

［解］　$b^2-4ac=(-3)^2-4\times3\times2=-15<0$

よって，グラフは下に凸で，頂点のy座標が正だから

グラフはx軸と交わらない。ゆえに解なし。



x軸と交わらない

(3)　2次関数のグラフと2次不等式

2次方程式と同様に，グラフをかくことにより，yの値が正になる範囲，負になる範囲が明らかになるので，2次不等式を解くことができる。指導法については，旧課程と変わらない。

5．グラフについての事前調査

このアンケート調査は中学校で学習した内容を範囲とし，２次関数の学習に入る前に，最初の授業において15分間で実施した。

(1)　アンケート調査用紙

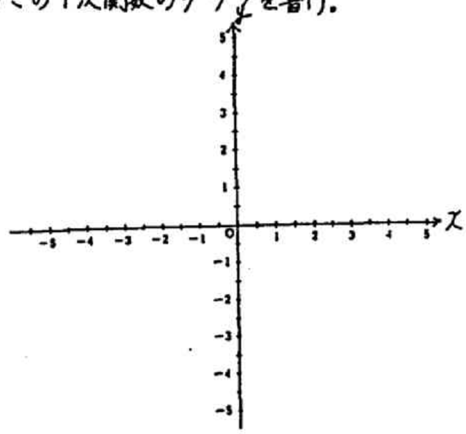
数学Ｉ　関数についてのアンケート調査　都立（　　　）高校，氏名

(1) １次関数 $y=2x-3$ について、次の問いに答えよ。

①次の対応表を完成せよ。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

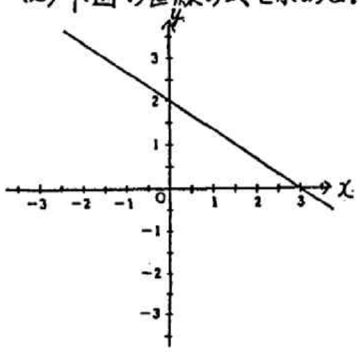
②この１次関数のグラフを書け。



③②のグラフの傾きとy切片を求めよ。

傾き $\boxed{\quad}$　　y切片 $\boxed{\quad}$

(2) 下図の直線の式を求めよ。



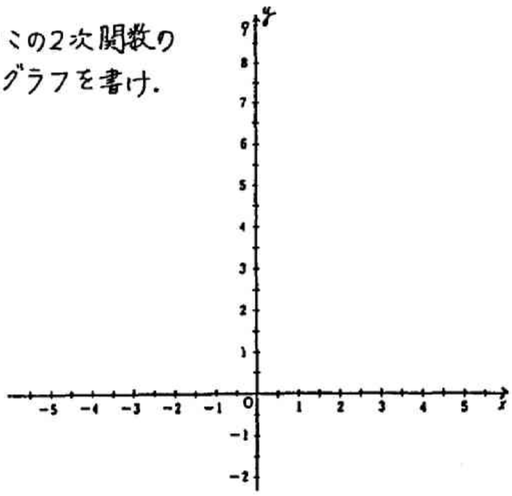
$\boxed{\qquad\qquad}$

(3) ２次関数 $y=x^2$ について、次の問いに答えよ。

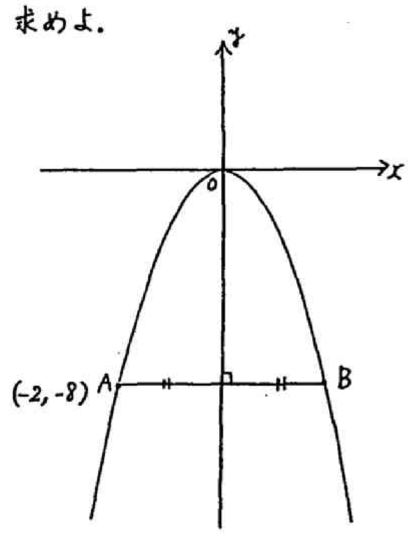
①次の対応表を完成せよ。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

②この２次関数のグラフを書け。



(4) 次の放物線上の点Ｂの座標を求めよ。



点Ｂ（　，　）

(2) アンケート調査の集計結果及び分析・考察

【アンケート調査集計結果】

		A 高校	B 高校	合 計
(1)	①	91人(54.2%)	124人(68.1%)	215人(61.5%)
	②	66人(39.3%)	100人(54.9%)	166人(47.4%)
	③	76人(45.2%)	119人(65.4%)	195人(55.7%)
(2)		30人(17.9%)	36人(19.8%)	66人(18.9%)
(3)	①	82人(48.8%)	121人(66.5%)	203人(58.0%)
	②	57人(33.9%)	102人(56.0%)	159人(45.2%)
(4)		61人(36.3%)	92人(50.5%)	153人(43.7%)
対象人数		168人(2年)	182人(1年)	350人

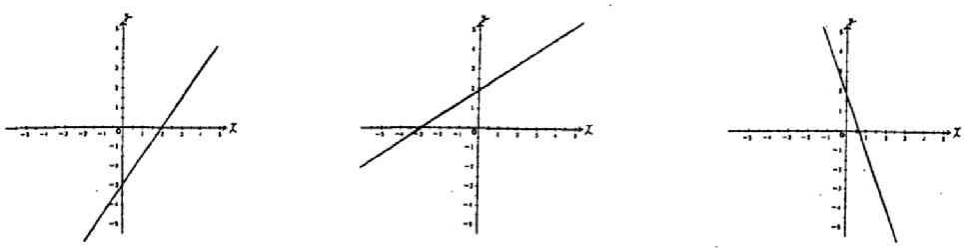
【分析・考察】

ア　問題1では，大部分の生徒が取り組んでいた。

①　対応表はよくできていたが，xが負の数のとき，計算ミスが目立った。

②　グラフは，かけているか，全くかけていないかのどちらかに分かれた。

〈誤答例〉

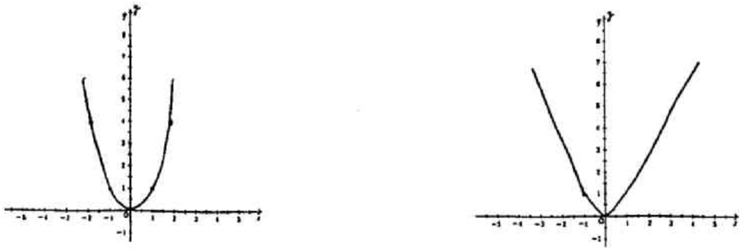


③　傾きを$2x$としている生徒が目立った。

イ　問題2では，傾きに－をつけていない生徒が多かった。

ウ　問題3では，点のとり方が不正確であり，なめらかな曲線でかかれていなかった。

〈誤答例〉



エ　問題4では，点Bを（2，8）と書いている解答が多かった。

オ　全体を通して，次の2点を感じた。

①　1次関数，2次関数とは何か，理解できていない生徒がいる。

②　中学校での学習内容を忘れており，このアンケート調査により，思い出した生徒が多い。

6．評価テストの実施

この評価テストは，座標軸のとり方を３通り用意し，グラフのかき方を正しく理解できたかどうかを調べる為に実施したものである。

(1)　評価テスト

数学Ⅰ　２次関数のグラフに関する評価テスト

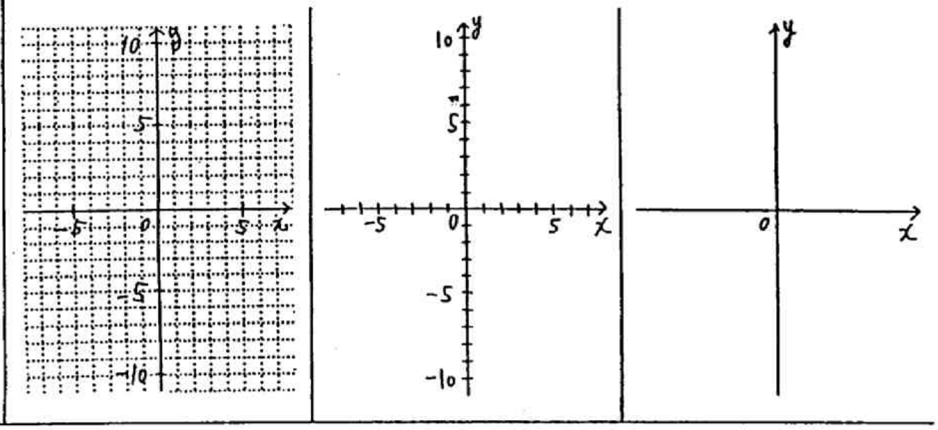
都立(　　　　　　　)高校　(　)年(　)組(　)番 氏名(　　　　　　)

［１］ 次の２次関数の頂点の座標を求め、そのグラフをかけ。なお、途中式を必ず記すこと。

① $y=x^2-4x+3$

（式）

（<注意事項>下記の３つのグラフ用紙のうち、１つを選び、グラフをかくこと。）

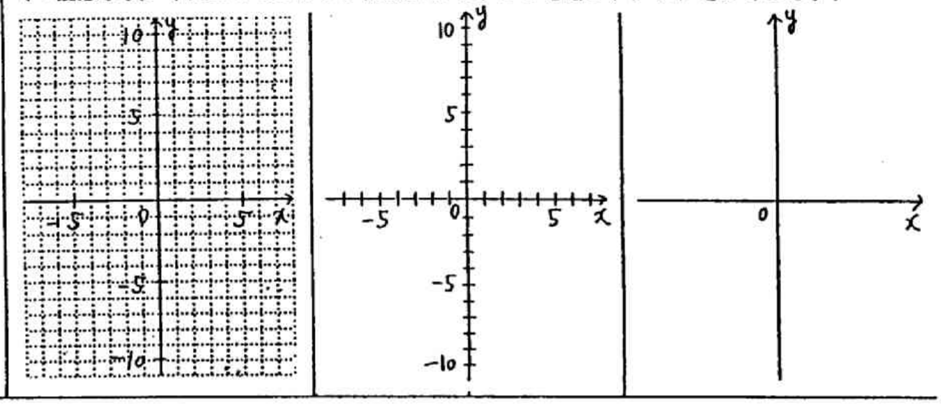


頂点(　,　)

② $y=2x^2+4x+2$

（式）

（<注意事項>下記の３つのグラフ用紙のうち、１つを選び、グラフをかくこと。）

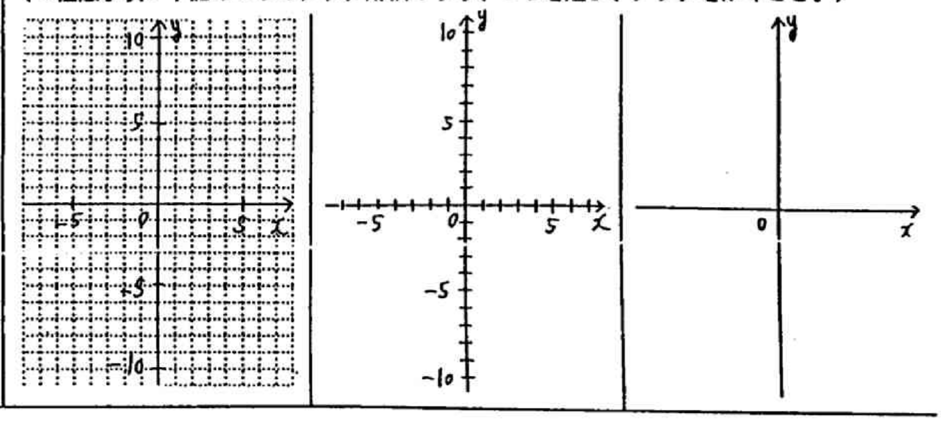


頂点(　,　)

③ $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-5$

（式）

（<注意事項>下記の３つのグラフ用紙のうち、１つを選び、グラフをかくこと。）



頂点(　,　)

(2) 指導法（途中経過）の種類

ア　平方完成によるもの（その１）

中カッコを使用する方法：$y=a\{(x-p)^2-p^2\}+q$

イ　平方完成によるもの（その２）

x^2の係数を１にする方法：$\frac{1}{a}y=x^2+bx+c$

ウ　$y=ax(x+b)+c$ によるもの

エ　その他：(1)〜(3)以外の方法または無解答

(3) グラフ用紙の種類

ア　方眼紙

イ　座標軸のみに目盛りあり

ウ　座標軸のみで目盛りなし

エ　無解答

(4) 集計表（Ⅰ）…………………同じ生徒に３種類の指導法を実践した場合

（全日制普通科２校〈１学年〉及び全日制職業科１校〈２学年〉実施）

受験者数：298人

A　２次関数の式を変形するための途中経過の利用状況・正答率（単位：%）

指導法（途中経過）の種類	ア		イ		ウ		エ	
	①	②	①	②	①	②	①	②
$y=x^2-4x+3$	86.3	26.8	85.5	44.0	40.0	6.7	0.0	22.5
$y=2x^2+4x+2$	74.3	24.8	71.5	41.3	42.1	6.4	0.0	24.8
$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-5$	52.2	14.8	36.0	38.3	25.0	2.7	0.0	44.3

（備考）

①：正答率

②：利用者率

利用者率 ＝ $\frac{\text{利用者数}}{\text{受験者数}}$

正答率 ＝ $\frac{\text{正答者数}}{\text{利用者数}}$

B　グラフ用紙の選択の状況・正答率（単位：%）

グラフ用紙の種類	ア		イ		ウ		エ	
	①	②	①	②	①	②	①	②
$y=x^2-4x+3$	54.9	69.1	55.0	6.7	81.8	7.4	0.0	16.8
$y=2x^2+4x+2$	41.4	62.6	47.8	7.7	62.0	9.7	0.0	21.8
$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-5$	29.1	32.3	30.8	4.4	31.8	7.4	0.0	56.0

(5) 集計表（Ⅱ）…………………クラスによって異なる指導法を実践した場合。

（全日制職業科１校〈１学年１校〉実施）

A　２次関数の式を変形するための途中経過の正答率（単位：％）

指導法（途中経過）の種類	ア ①
$y=x^2-4x+3$	64.5
$y=2x^2+4x+2$	25.8
$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-5$	6.5

B　グラフ用紙の選択の状況・正答率（単位：％）

グラフ用紙の種類	ア		イ		ウ		エ	
	①	②	①	②	①	②	①	②
$y=x^2-4x+3$	61.9	67.7	66.7	9.7	－－	0.0	0.0	22.6
$y=2x^2+4x+2$	52.9	54.8	0.0	9.7	－－	0.0	0.0	35.5
$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-5$	28.6	22.6	0.0	3.2	－－	0.0	0.0	74.2

A　２次関数の式を変形するための途中経過の正答率（単位：％）

指導法（途中経過）の種類	ウ ①
$y=x^2-4x+3$	65.5
$y=2x^2+4x+2$	55.2
$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-5$	24.1

B　グラフ用紙の選択の状況・正答率（単位：％）

グラフ用紙の種類	ア		イ		ウ		エ	
	①	②	①	②	①	②	①	②
$y=x^2-4x+3$	60.0	69.0	66.7	10.3	－－	0.0	0.0	24.1
$y=2x^2+4x+2$	55.6	62.1	100	6.9	－－	0.0	0.0	34.5
$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-5$	18.8	55.2	0.0	6.9	－－	0.0	0.0	41.4

(6) 分析・考察

ア　x^2 の係数が１の場合については，そうでない場合に比べ比較的出来が良い。

イ　頂点の y 座標が正しく求められない者が多い。

ウ　上に凸，下に凸の概念が把握出来ていない。

エ　頂点は正しくとれているが，第２，第３の点が正しくとれていない。

オ　方眼紙の場合は，点をとることに一所懸命で，グラフに関する全体的な把握が出来ていない者が多い。

カ　指導法については，授業で最初に指導した方法の定着率が非常に高い。

キ　数Ⅱ，数Ⅲへの導入を考えると，$y=a\{(x-p)^2-p^2\}+q$ の形に変形する方法で指導することが望ましい。

７．まとめ

(1) 「数学Ⅰ」において複素数を学習しないため，一般的に２次方程式を解くことができなくなった。グラフをきちんと把握していないと２次方程式や２次不等式の解法を理解できない。アンケート調査の結果からも明らかなように，中学校の内容を十分理解していない者も多く，グラフの指導については時間をかける必要がある。

(2) 座標や関数の概念，数の大小関係などの基本事項をしっかり押さえることが重要である。

(3) 教師が従来の２次関数の指導とは大きく異なることを認識し，指導に対する意識改革を図る必要がある。

Ⅱ　具体例を通して，数の並び方の規則性を発見することにより，数学的な考え方を育てる指導

－自然数の列を題材にして－

1．はじめに

近年の情報化の進展，コンピュータの発達等にともない，「離散数学」が数学の重要な分野になってきている

今年度より実施されている学習指導要領でも，離散数学への窓口となる「個数の処理」を取り上げている。人類が太古より生活の中で培ってきた「数える」という行為を改めて問い直し，数学的な見方や考え方への意識を深めていくことが大切である。

このような観点に立ち，本研究では，「個数の処理」の中でも新しく取り扱われている「自然数の列」について，具体的な教材や教具を用いた指導を試み，その結果を考察する。

2．研究のねらい

私達は日頃，「数える」ことを何の変哲もなく行っている。しかし，数える対象が多くなると「数える」ことは，なかなか厄介な問題へと変わる。何らかの工夫をしない限り，効率よく正確に数えることは難しい。数え方には図を使ったり，一対一の対応関係を使うなど問題により様々な方法が考えられるが，そのような方法の工夫を通して，数学的な見方や考え方を認識させることが重要である。

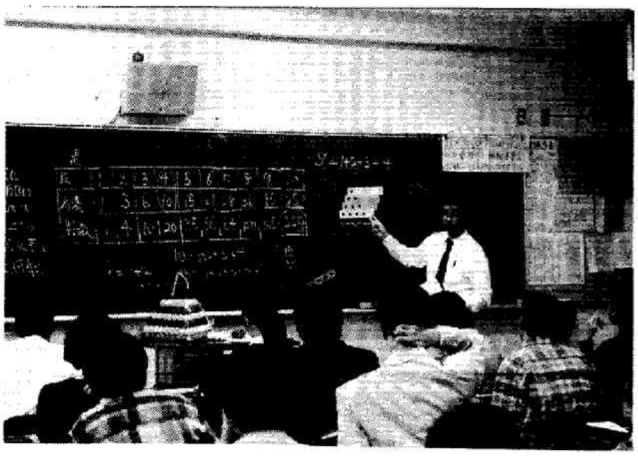
本研究では，自然数の列の規則的な並び方に気付かせ，その数え方を考えさせる指導を目指し，以下のようなねらいを設定した。

⑴　三角数や四角数を定義から導入せず，具体例で提示し，その並びの規則性と数え方について考察させ，数学的な見方や考え方のよさを理解させる。

⑵　発見の喜びを実感させるために生徒一人一人の考えを取り上げる。同じ問題に対して様々な考え方があることを認識させる。

⑶　三角数の和，四角数の和について考察させる。

⑷　模型等の教具を活用し，直感的・体験的に考えられるよう指導を工夫する。



3．研究内容・方法

生活の中の具体的な問題として，団子の積み上げ（三角数の和）問題を取り上げた。

(1) 団子の積み上げ問題を提示し，さらに球形の発泡スチロールで作った教具（写真１）を用いてこの問題についての直感によるイメージを定着させる。

(2) 生徒の作業を重視し，棒状の個数カード（写真２），個数プリント（写真３）を活用させる。

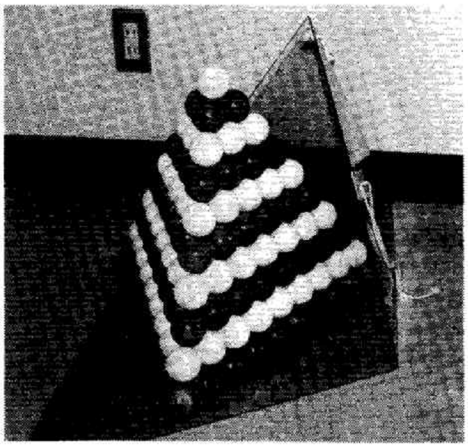
(3) 生徒自身が考えた方法を記録させるプリント（記録用紙）を用意するなど，すべての生徒の考え，発想に配慮する。

(4) 自然数の和の式は，作業や視覚を通して生徒自らが推測し発見することを基本とし，その後代数的に取り扱う。

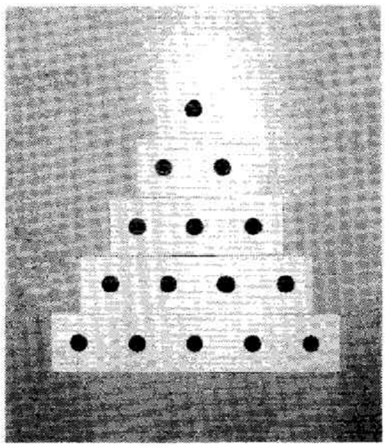
(5) 生徒の自主的な作業の流れを重視するために，三角数，四角数の定義は作業の後に指導する。

(6) 三角数，四角数の和の説明では，生徒のイメージを具体的にし関心をもたせるよう板目紙の教具（写真４）を使う。

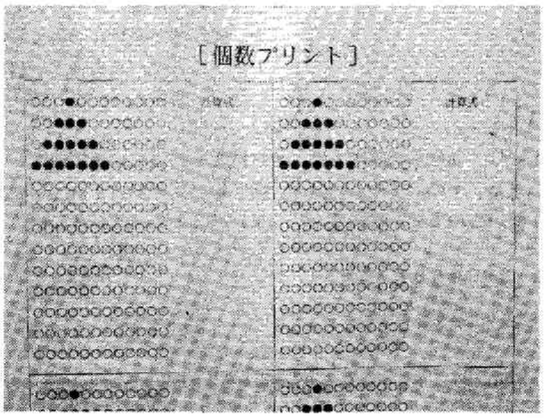
(7) 授業の最後にアンケート調査を行い，生徒の感想や理解度を分析することにより今後の研究に生かす。



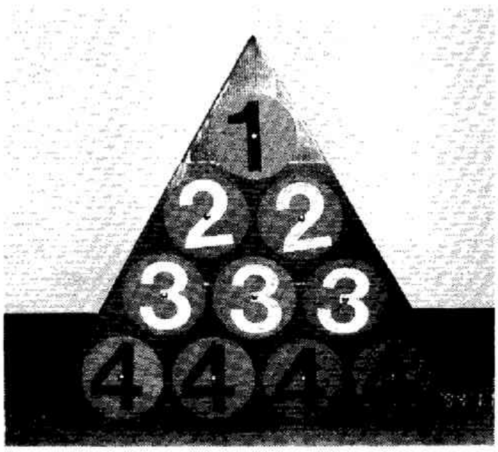
（写真１）



（写真２）



（写真３）



（写真４）

4．学習指導案

実施科目：数学Ⅰ（１学年必修科目）　　　　単元：個数の処理（自然数の列）

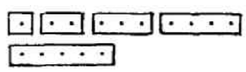
（1）１時限目

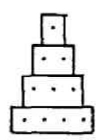
本時の目標：自然数の列の和を図形的な見方により、効率よく求める方法を発見する。

<table>
<tr><th></th><th></th><th>指導内容</th><th>学習活動</th><th>＊評価の観点　及び　・留意点</th></tr>
<tr><td>導
入</td><td>20
分</td><td>「お月見の日に丸いお団子を正三角形状に上から１段目は１個、２段目は３個、３段目は６個、という具合に１０段まできれいに並べて積み上げる。そこで、１０段まで積み上げるには、一番下の段は団子が何個必要であるか、また１～１０段まで全部で何個必要であるか。」
以上の問題を提示する。

問題を効率よく解く方法について考えるという指針を示す。</td><td>お団子の各段の個数と累計数を数えて表にまとめて問題に答える。
<table><tr><td>段</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>個数</td><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>累計数</td><td>1</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
各段ごとの個数の並びについて
１，３，６，１０，１５，・・・・
→１，１＋２，１＋２＋３，・・・・
という規則性があることを確認する。</td><td>・問題の理解を促すために、お団子の積み上がった模型を使いながら１～３段まで個数と累計数を説明して、その上で４段目以降を考えさせる。

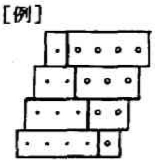
＊順に加えていきながら、最下段の個数や１～１０段までの合計数を求める方法は発展性がないこと（規則性の利用の必要）に気づく。（数学的な考察）</td></tr>
<tr><td>展
開</td><td>25
分</td><td>５種類の［カード］を２組ずつ合計１０枚を各生徒に配り、これらを用いてＳ＝１＋２＋３＋４の効率のよい計算方法を考えさせ、発見できたものをせる。

［カード］
長方形状の板目紙に黒丸が１～５個書かれたもの
</td><td>５種類のカード５枚を黒丸が三角形状に並ぶように組み合わせる。

［三角形状］

１～４個の黒丸の三角形状の図形において残りの［カード］（黒丸１～４個が１枚ずつ、黒丸５個が２枚）の何枚かを追加も認めて、改めて［カード］を組み合わせて図形を一つ作り、効率のよい計算方法を見つける。

効率のよい計算方法が発見できたものについて記録用紙にその図形及び計算方法を記入する。</td><td>・Ｓ＝１＋２＋３＋４の効率のよい計算方法については、個数の多い自然数の列の和（例えば１＋２＋３＋・・・＋４９＋５０）に対しても同様に活用できる方法であることを意識させる。

・［カード］を組み合わせることについては、生徒の状況に応じて例を示し、理解を促す。

［例］

＊自然数の列の１ずつ増えるという規則性に対する適切な利用ができる。（数学的な考察・処理）

＊生徒自ら手作業により考えることで、規則性の発見についての興味・関心・意欲が高まる。（積極的な活用・態度）</td></tr>
<tr><td>ま
と
め</td><td>5
分</td><td>本時のまとめ

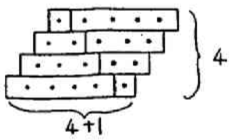
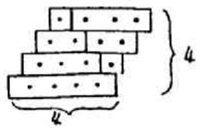
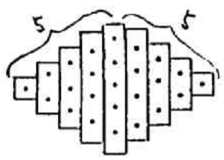
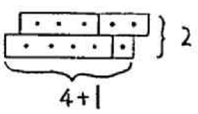
宿題（１＋２＋３＋・・・・・＋４９＋５０を効率のよい計算方法により求める。）の指示

記録用紙の回収（Ｓ＝１＋２＋３＋４の効率のよい計算方法を２つ以上発見できていない生徒に対してはその宿題の指示をする。）</td><td>Ｓ＝１＋２＋３＋４は、お団子の問題では４段目の個数に相当し、その効率のよい計算方法は、段数が多いもので活かされる。

自然数の列の和は、規則的な個数の配列により求められる。</td><td>＊自然数の列の和の解法について、図形的な見方ができる。（数学的な見方、考え方の良さの認識）</td></tr>
</table>

（2）2時限目

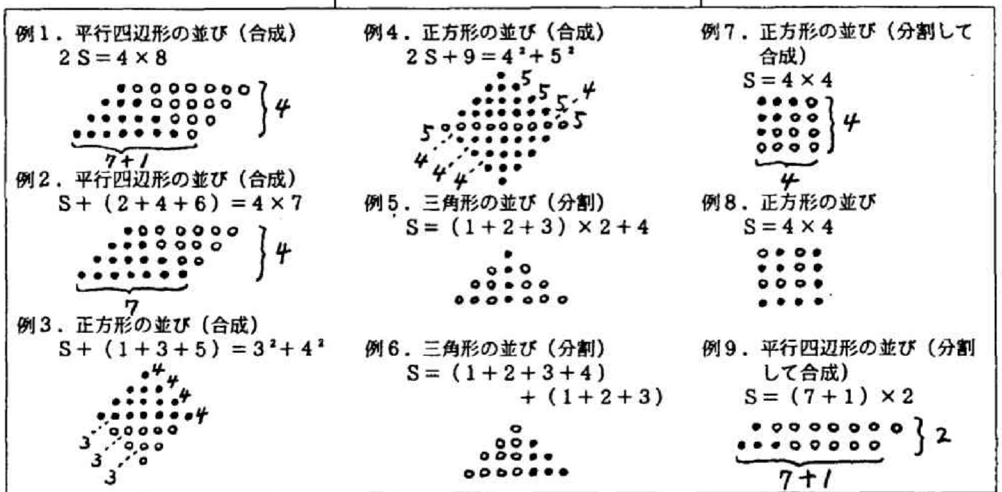
本時の目標：自然数の列の和を効率よく求める方法を奇数の列の和に発展させる。

		指導内容	学習活動	＊評価の観点　及び　・留意点
導入	10分	S＝1＋2＋3＋4の計算方法を未提出の生徒から回収する。 お団子の問題の50段目の解答を生徒に板書させる。	1+2+3+ ------ +50の計算方法の発表は1+2+3+4の計算方法と同じ方法で行う。	・1+2+3+ ---- + 50の効率のよい計算方法を発表する。
展開	15分	S＝1＋2＋3＋4の効率のよい計算方法の例を示す。 例1  例2  例3  例4  	例1～例4について理解する。 S＝1＋2＋3＋4について他の計算方法があれば発表する。 $S_{50}=1+2+3+ \cdots +50$ $=(1+50)\times\frac{50}{2}$ $S_{51}=1+2+3+ \cdots +51$ $=(1+50)+(2+49)+ \cdots +(25+26)+51$ $=51\times 26$ $=51\times(\frac{50}{2}+1)$となり、nが偶数、奇数のいずれでも $1+2+3+ \cdots +n=\frac{n}{2}(n+1)$を理解する。	・例1～例4の計算例は模造紙にカードの並びの図を書いて、明確に示す ＊多くの生徒の色々な解法を発表させ評価する。（数学的な考察） ・S_{50}，S_{51}の考察では例4のカードの並びの図を充分に考えさせる。 ・例4の方法で解くには場合分けが必要であることに気づかせる。 ・自然数の列の和を図形的に捉え、計算式と比較することにより、 $\frac{n}{2}(n+1)$を導く。
	20分	偶数の列の和 S＝2＋4＋6＋8 奇数の列の和 S＝1＋3＋5＋7	$2+4+6+8=2(1+2+3+4)$ $=2\times\frac{4(1+4)}{2}$ ●○ ●●○○ ●●●○○○ ●●●●○○○○ ［個数プリント］に図形と式を書くことによりS＝1＋3＋5＋7を求める。	・偶数の和の計算では分割することにより自然数の和に帰着できることを理解させる。 ・S＝1＋3＋5＋7の解法ではカードは使わず、［個数プリント］に記入し、考えさせる。但し、個数の多い奇数の列の和でも使えるようにする。 ＊生徒自身の発想により考えることで規則性の発見ができ、興味・関心・意欲が高まる。（積極的な活用態度）
まとめ	5分	本時のまとめ 宿題の指示 (1)1+3+5+7 (2)1+3+5+ ---- +15 (3)1+3+5+ ---- +17 (4)1+3+5+ ---- +19	自然数の列の和は$\frac{n}{2}(n+1)$の形にまとめられる。	＊自然数，偶数の列の和において $\frac{n}{2}(n+1)$が活用できる。 （数学的な考察）

（3）3時限目

本時の目標：奇数の和（四角数）の図形的な見方による効率のよい計算方法を認識させる。また、三角数，四角数の代数的な求め方を理解させる。

		指導内容	学習活動	＊評価の観点　及び・留意点
導入	20分	奇数の和　S＝1＋3＋5＋7　の効率のよい計算方法の発表（宿題）	数名の生徒が黒板で発表する。 奇数の和の計算方法を記録した［個数プリント］を提出する。 板書した以外の解答があれば発表する。	＊自分で考えた解答である。（興味・関心・意欲） ＊規則性を発見している。（数学的な見方・思考・判断） ＊発展性のある解答である。（数学的な考察・処理）
展	25分	S＝1＋3＋5＋7の計算方法の例を提示（例1～例9）	例1～例9について、図形から計算式の意味を考察する。（生徒には各例をプリントして配布すると同時に、模造紙に書いて黒板に貼る。）	・いろいろな考え方があることを認識させる。 ・計算式の意味を図形から考えさせる。 ・プリントの配布等により、時間の短縮を図る。



開		三角数，四角数の定義	三角数，四角数の定義をまとめる。	・数の列としての定義と共に、図形的に捉えさせる。
		四角数を導く。	S＝1＋3＋5＋7　を例に、四角数の一般化を図る。 （1）四角形から求める。 （2）代数的に求める。 S＝1＋3＋5＋7 ＋　S＝7＋5＋3＋1 2S＝8＋8＋8＋8	・n番目の奇数の形を認識させる。 ＊四角数を図形的に捉えている。（図形的な見方） ＊四角数を代数的に求められる。（代数的な見方）
		三角数を代数的に求める。	S＝1＋2＋3＋4 ＋　S＝4＋3＋2＋1 2S＝5＋5＋5＋5	・四角数の場合と同様な考え方が利用できることに気づかせる。
		三角数と四角数の関係	例2，例5，例6　を参考にしながら三角数と四角数の関係を考察する。	＊四角数は、三角数によって求められることが理解できる。（数学的な見方）
まとめ	5分	本時のまとめ	本時の要点を確認 （1）三角数，四角数の定義 （2）三角数，四角数の公式 （3）三角数と四角数の関連	＊三角数，四角数について、図形的な見方及び代数的な見方から、その規則性が理解できる。（知識・理解） ・公式の暗記に終わらないようにする。

（4）４時限目

本時の目標：お団子の積み上げ問題（三角数の和）を効率よく求める。

		指導内容	学習活動	＊評価の観点　及び　・留意点
導入	5分	お団子の積み上げ問題（三角数の和）を再確認する。 1+3+6+・・・+45+55 =1+(1+2)+(1+2+3)+・・・+(1+2+3+・・・+9+10) の分解を示す。	模型を示す。 分解の式により、お団子の積み上げ問題は、三角数の和であることを理解する。	・イメージを明確にするために、お団子の積み上げ模型を示し説明する。 ・分解式を再確認するために、模型において各段を離しそれぞれ個数を確認させる。
展開	15分	四角数の和の効率の良い計算方法を説明し、技法を理解させる。 例として Ｓ＝１＋４＋９＋１６ を示す。 ① ②② ③③③ ④④④④ ①　　　④　　　④ ②②　　④③　　③④ ③③③　＋　④③②　＋　②③④ ④④④④　④③②①　①②③④ ⑨ ⑨⑨ ＝ ⑨⑨⑨ ⑨⑨⑨⑨	求める和を分解する。 １＋４＋９＋１６ ＝１×１＋２×２＋３×３＋４×４ ＝１＋（２＋２）＋（３＋３＋３） ＋（４＋４＋４＋４） 三角形状に並べる。 120°の回転を二度行い、同じ位置の和を求める。 ３Ｓ＝９×１０より Ｓ＝３０ を求める。 分解，回転の作業を再確認する。	・三角数の和を求める方法の導入として四角数の和を求める方法を示す。 ・分解したものを三角形状に並べ、全てを加えたものが求めるものであることを認識させる。 ・120°の回転については、板目紙の教具を用いて説明する。 ＊和を求める方法 分解をもとに三角形状に並べる。 回転作業をする。 同じ部分の和を求める。 総和を求める。 を理解する。 （数学的な見方・考察） ・三角数の和を求める方法は、四角数と同様であることを説明する。
	10分	三角数の和 Ｓ＝１＋３＋６＋１０ 効率の良い計算方法を、四角数の和を参考に考えさせる。 ④ ③③ ②②② ①①①① １０段目までの総数を求めさせる。	分解をもとに三角形に並べる。 回転作業をする。 同じ部分の和を求める。 総和を求める。 作業，答えの確認をする。 同じ作業をすることによりお団子の総数を求める。 答えの確認をする。	・四角数の場合と同様に三角形を作らせるが、並び方が逆になることを発見させる。 ＊和を求める作業ができる。 （数学的な考察・処理） ・拡張がスムーズにできているかに注意する。
まとめ	20分	本時のまとめ アンケートを行う。	今までの例は、数の並び方の規則性を利用したものであることを理解する。 アンケートに答え、演習問題を解く。	＊数え上げにおいて規則性の利用の効果が理解できる。 （数学的な見方・考え方の良さの認識） ＊アンケートの中の問題が解ける。 （知識・理解）

5．アンケート調査の集計結果

『自然数の列』の授業を終えて

（事後アンケート調査　．．．．．1994. 11）

．．．以下の質問について該当するものを一つ選んで右の欄に○を記入して下さい。

K高校（125名）

1．授業には興味を持って参加できましたか。

（1）　自然数の和１＋２＋３＋４の計算法の発見について

	ア	イ	ウ
①　取り組みの様子　ア．熱心に取り組んだ　イ．ふつう　ウ．興味を持てなかった	24.8％	70.4％	4.8％
②　自分の方法は　ア．発見できた！　イ．考えたがダメだった　ウ．あきらめていた	29.6％	64.8％	5.6％

（発見できた人は何通りできましたか．．．．．平均１．９通り）

（2）　奇数の和１＋３＋５＋７の計算法の発見について

	ア	イ	ウ
①　取り組みの様子　ア．熱心に取り組んだ　イ．ふつう　ウ．興味を持てなかった	36.0％	58.4％	5.6％
②　自分の方法は　ア．発見できた！　イ．考えたがダメだった　ウ．あきらめていた	36.8％	56.8％	6.4％

（発見できた人は何通りできましたか．．．．．平均２．６通り）

（3）　団子の数はいくつあるか（三角数の和）について

	ア	イ	ウ
①　取り組みの様子　ア．熱心に取り組んだ　イ．ふつう　ウ．興味を持てなかった	44.0％	51.2％	4.8％
②　自分の方法は　ア．求められた！　イ．考えたがダメだった　ウ．あきらめていた	27.2％	63.2％	9.6％

2．次の項目について理解は深まりましたか。

	ア	イ	ウ
（1）　三角数の求め方（１＋２＋３＋４＋・・・）　ア．理解できたと思う　イ．どちらともいえない　ウ．わからなかった	49.6％	43.2％	7.2％
（2）　四角数の求め方（１＋３＋５＋７＋・・・）　ア．理解できたと思う　イ．どちらともいえない　ウ．わからなかった	42.4％	49.6％	8.0％
（3）　四角数の和の求め方　ア．理解できたと思う　イ．どちらともいえない　ウ．わからなかった	44.0％	44.8％	11.2％
（4）　三角数の和の求め方　ア．理解できたと思う　イ．どちらともいえない　ウ．わからなかった	48.8％	40.0％	11.2％

3．規則性を見いだそうとする姿勢は身につきましたか。

	ア	イ	ウ
ア．身についたと思う　イ．どちらともいえない　ウ．そう簡単に身につくものではない	26.4％	46.4％	27.2％

4．いくつかの教具を用意しましたが，これらは役に立ったでしょうか。

	ア	イ	ウ
（1）　発泡スチロールの模型は団子の数え上げの問題を理解する上で・・・　ア．役立った　イ．どちらともいえない　ウ．模型は必要ない	72.8％	24.0％	3.2％
（2）　カードは三角数の求め方を発見する上で・・・　ア．役立った　イ．どちらともいえない　ウ．ないほうがよい	48.0％	47.2％	4.8％
（3）　個数プリントは奇数の和を求める上で・・・　ア．役立った　イ．どちらともいえない　ウ．ないほうがよい	57.6％	40.0％	2.4％
（4）　団子の数を数えるために用いた教具（三角数，四角数の和）は・・・　ア．役立った　イ．どちらともいえない　ウ．意味がよくわからなかった	77.6％	14.4％	8.0％

5．ちょっと考えてみて下さい。答のみ右の欄に記入して下さい。

（1）①　１＋３＋５＋・・・・・＋１０１＝	（正答率）24.8％
②　１＋４＋９＋１６＋・・・・・＋９００＝	（正答率）12.8％
（2）１００個のみかんを四角数にしてできるだけ段数を多く積み上げるとき一番下の段にはいくつ並べたらよいか	（正答率）15.2％

6．最後に・・・「自然数の列」の授業への感想がありましたら　お願いします。

- 身近な三角数，四角数でしたが、今回の授業は発見があったり、感心させられたりした。
- このようなみんなで意見を出しあえるような授業をこれからも組み込んでほしい。
- 公式をバリバリ覚えるのもいいが、考えて発見することは意欲が出ていいと思う。
- 最初はどんなことをやるのかわからなかったが、やっていくうちに奥が深いことにびっくりした。
- 団子ピラミッドは傑作だと思う。

６．分析及び考察

【授業実践について】

(1) 通常とは異なる授業形態に，はじめは生徒に戸惑いが見られた。

(2) ［発泡スチロールの団子の模型］（写真１）や［板目紙の三角形］（写真４）の教具は生徒に好評で，使用の際には歓声が上がった。

(3) はじめ［棒状の個数カード］（写真２）をばらで配布し回収したら，予想以上に時間がかかったため，１セットずつ紙袋に入れ各生徒に配るようにした。

(4) 毎時間，計算方法の発表や各生徒の考察の時間をとったので，教師の説明の時間が短く，要点の整理が十分でなかった。

(5) 三角数や四角数を効率よく求めるには「和」の計算よりも「積」の計算が便利であることを理解させるために［棒状の個数カード］を用いたが，利用した時間が短かったためか十分にその意図が伝わらなかった。

【アンケート調査について】

(1) 授業が進むに従い「熱心に取り組んだ」生徒が増えている。これは，授業への慣れと同時に，題材が生徒の関心を引くのに適切な難易度になってきたためと考える。

(2) 約半数の生徒が「内容について理解できた」とは感じていない。いろいろな計算方法を紹介した反面，まとめが散漫となり要点がつかみにくかったようである。

(3) 教具については，多くの生徒が「役立った」と答えている。改めて，教具の重要性を認識した。

(4) アンケート調査の問題の正答率は低かった。これは，授業での問題演習の時間が不足していたためと考えられる。応用力を付けるには問題演習を十分行う必要がある。

７．まとめと今後の課題

授業では，効率のよい計算方法の発見について，予想しなかった方法も出るなど，生徒に考えさせるという当初のねらいをある程度達成することができた。しかし，その一方で「何が重要事項なのかわかりにくい」など，「公式」を使い慣れている今日の生徒にとって，焦点の絞りにくい内容の授業でもあった。

数学は常に，捉えたイメージを抽象化・数式化することによって発展してきた。直感的・体験的に理解しても，それをいかに数学の言葉に直し一般化していくかは，多くの生徒にとって高いハードルとなっている。このことを念頭に置きながら，今後，次のような方法で研究を進めていくこととしたい。

(1) 今回は一校だけの授業実践であったが，さらに幾つかの学校で授業を行い，比較検討する。

(2) 「数学Ａ」の「数列」との関連について考察する。

(3) 三角数，四角数を，はじめから「三角形」,「四角形」として導入する指導方法との比較をする。

(4) 生徒の理解を助ける教具等を開発し，数学的な見方や考え方を育てる指導の工夫を試みる。

Ⅲ　パーソナルコンピュータを通して，確率の考え方を理解させる指導

―シミュレーションとワークシートの効果的利用―

1．はじめに

ここ数年，コンピュータは急速に普及してきており，これを生徒に利用させ，使用に習熟させていくことが，学校教育における課題となっている。学習指導要領においても，高校数学の全般にわたり，コンピュータを積極的に活用するよう求められている。

今年度から実施された新教育課程の「数学Ⅰ」では,「個数の処理」や「確率」に関わる分野が大幅に拡充された。また，日常生活でも野球選手の打率や天気予報の降雨確率など「確率」の登場する場面が増えつつあり，その考え方を理解することが重要となっている。

そこで，本研究では，全都の高等学校に設置が完了しているパーソナルコンピュータを有効に利用し，確率の基本的な考え方をスムーズに導入する指導法を工夫した。

2．研究のねらい

学校における確率の考え方についての指導法としては，統計的な定義により確率を導入し，確率の考え方を定着させた上で，数学的な定義による確率へと発展させる方法が一般的である。確率の統計的定義を導入するためには数多くの試行をする必要があるが，実際に数多くの試行をすることは，授業時間の制約や，何回もの試行実験を嫌う生徒が多い中で，困難な状況である。

また，数学とは教員から一方的に教えてもらうものであり，退屈で難しく，生活から遊離したものと感じている生徒が多いことも事実であり，これらの生徒に対し，生徒自らが積極的に授業に参加し，興味をもって学習できるよう，指導内容・方法を工夫することが必要である。

そこで本研究では次のことをねらいとした。

(1)　パーソナルコンピュータの高速性を活かし，多数回の試行によるシミュレーションを通して生徒に「確率の統計的定義」を実感させ，「確率の数学的定義」へと発展させる指導を行う。

(2)　パーソナルコンピュータのグラフィック機能を活かし，生徒一人一人の能動的な取り組みの中から数学に興味をもたせ，積極的に数学に参加する指導を行う。

3．研究内容・方法

研究内容	研究方法
(1) 多数回の試行から、相対度数を用いた『確率の統計的定義』を理解させる指導	・1つのさいころを投げるシミュレーション (実験Ⅰ、実験Ⅱ) ・画びょうを投げるシミュレーション (実験Ⅲ) ・ワークシート
↓	
(2) 事象の統計的定義について考え、すべての事象が『同様に確からしい』ことを理解させ、『確率の数学的定義』を理解させる指導	・1つのさいころを投げるシミュレーションの実験結果 ・ワークシート
↓	
(3) 数学的定義の合理性を理解させ、同様に確からしいときの事象の確率を「数え上げ」や「場合の数」を用いた計算によって理解させる指導	・ワークシート (1つ、2つのさいころを投げる試行) ・ワークシート(赤玉、白玉が入った袋から玉を取り出す試行)

〈研究における留意点〉

●数学的内容について

・特に，確率の数学的定義については，数学的考え方のよさを指導する。

●生徒の活動について

・興味・関心をもって授業に臨んでいるかどうか，授業実践・アンケート調査等によって確かめる。

●ワークシートについて

・各自の学習活動やその成果を記録に残せるようにする。

・ワークシートは見やすいものにする。

・パソコンと併用し，学習しやすくする。

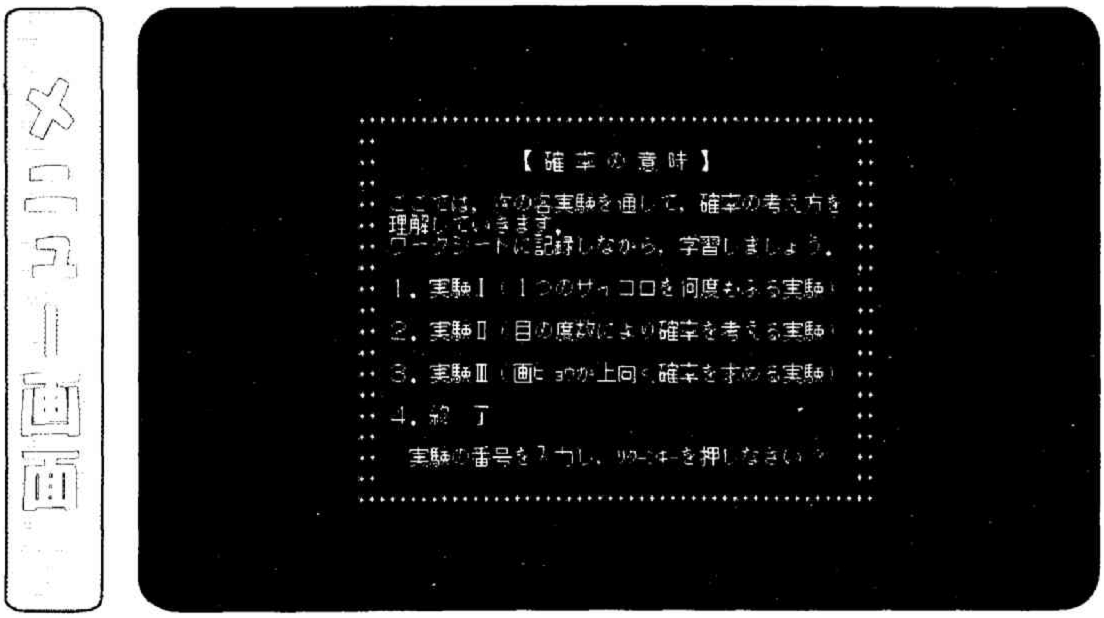
●パーソナルコンピュータについて

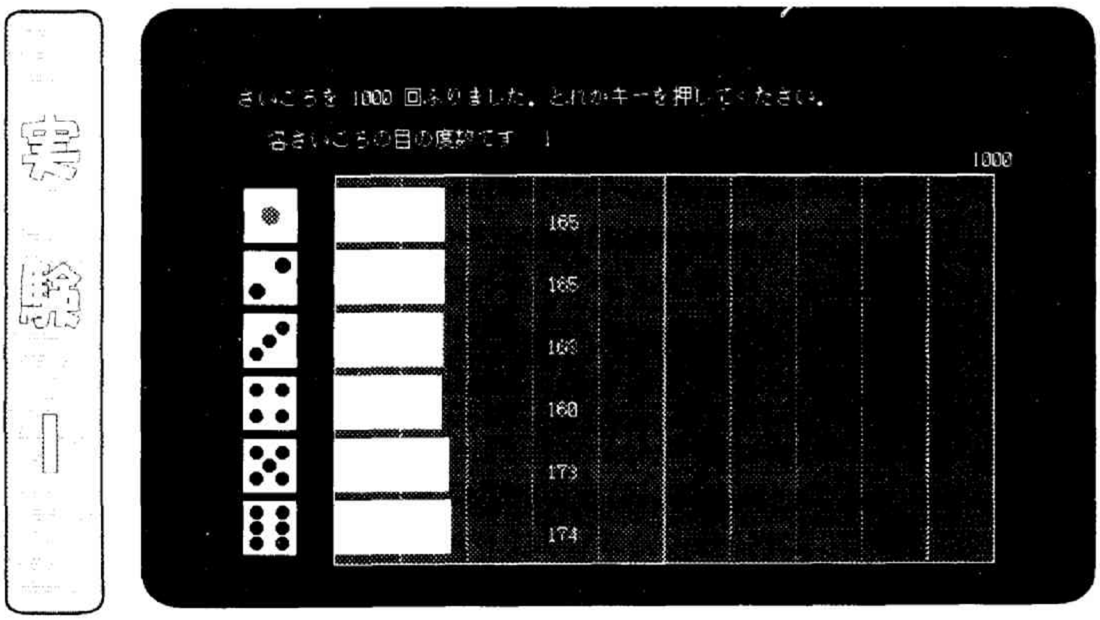
・操作しやすいものにする。

・高速性を十分に活かす。

・見やすいグラフィックにする。

4．シミュレーション





(1)　さいころを100回投げさせる。1から6のそれぞれの目の度数をワークシートに記入し，相対度数を電卓等で求める。

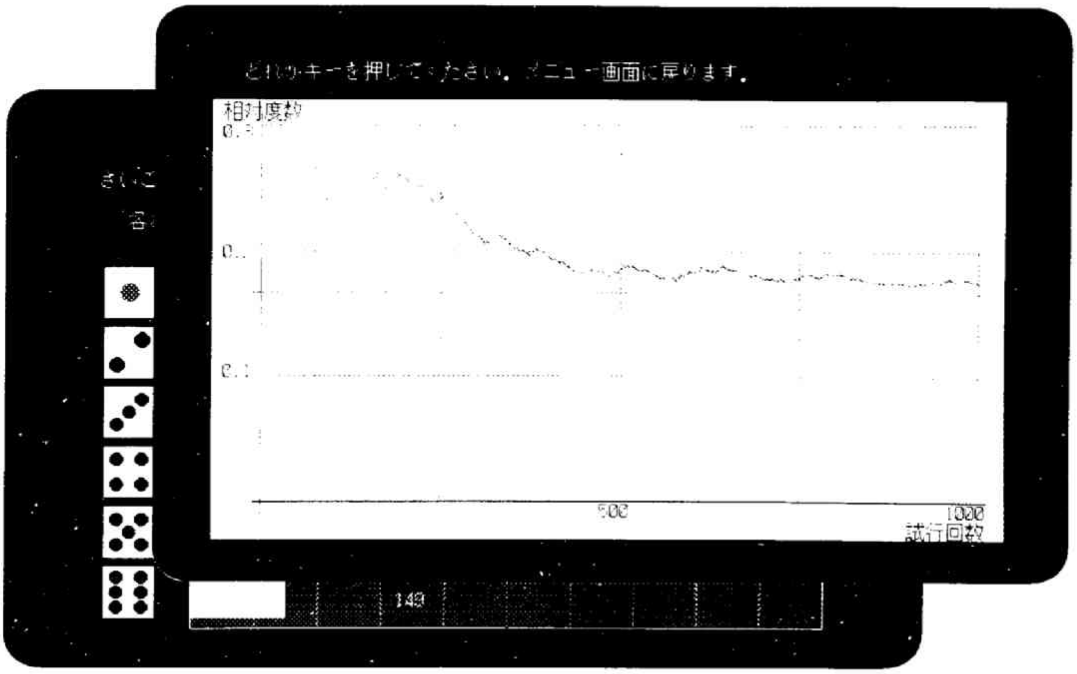
(2)　試行回数を，200，500，1000，2000回と変化させ同様の処理を行う。

(3)　1の目が出る場合に注目し，各試行回数における相対度数を表やグラフにして変化の様子を検討する。

〈指導上の留意点〉

- 数多くの試行を行った結果をワークシートに整理し実験の目的を理解させる。
- 試行回数の増加にともない相対度数が一定の値に近づくことを予想させる。
- さいころの実験からそれぞれの目の出方は，同程度に期待できることを確認する。

実験 II

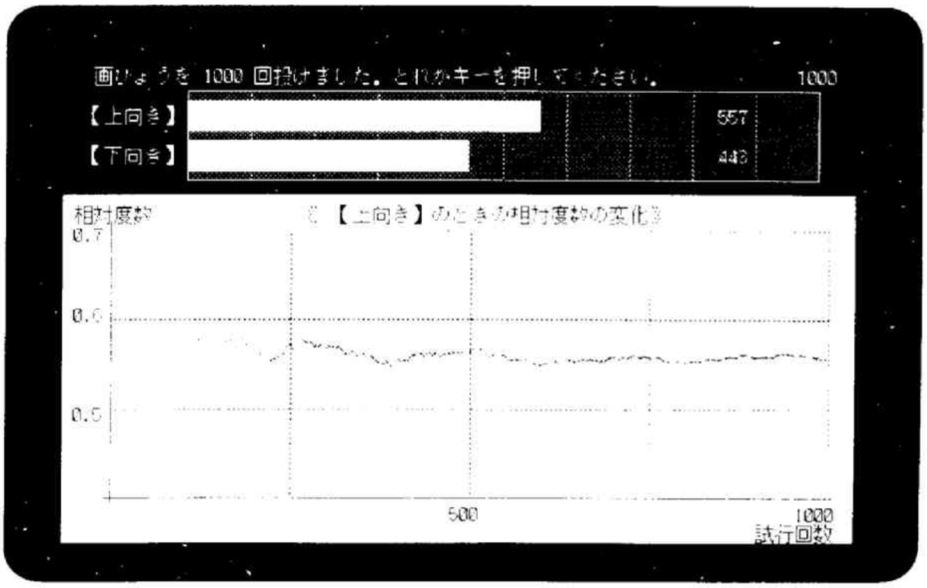


(1) さいころを5000回投げさせる。１の目が出る場合に注目し，試行回数の増加にともなう相対度数の変化の様子をグラフ化させ検討する。

〈**指導上の留意点**〉

・試行回数の増加にともない相対度数は一定値に近づくことから，確率の統計的定義を理解させる。

実験 III



(1) １個の画びょうをくり返し投げさせ，上向き，下向きの度数の変化と，試行回数の増加にともなう上向きの相対度数の変化をグラフ化する。

(2) 試行回数を変化させながら，グラフから画びょうの統計的確率を求める。

5．ワークシート（抜粋）

確率とその基本性質
＜確率の意味＞

【実験Ｉ】１個のさいころを投げる試行について考えてみよう。
この試行をＮ回行う。

●Ｎの値を変化させて実験結果を整理してみよう。

①Ｎ＝100 のとき

事　象	度　数	相対度数（r_1／Ｎ）
１の目が出る	r_1＝ 15	0.15

⑤Ｎ＝2000 のとき

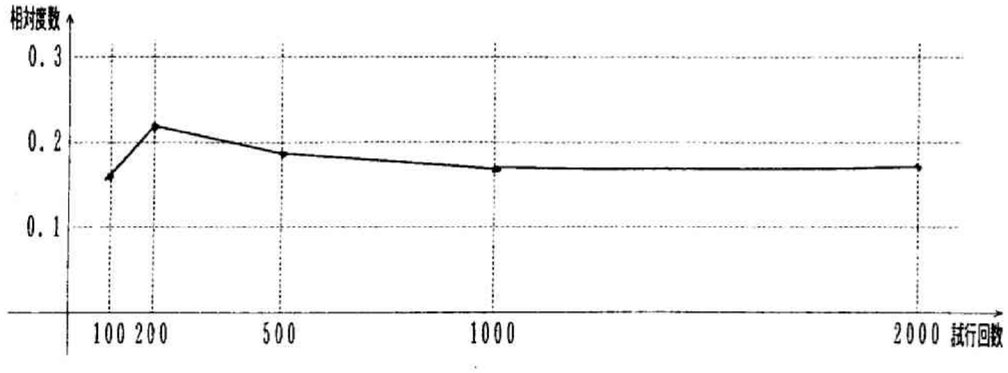
事　象	度　数	相対度数（r_1／Ｎ）
１の目が出る	r_1＝ 349	0.1745
２の目が出る	r_2＝ 330	0.1650
３の目が出る	r_3＝ 351	0.1755
４の目が出る	r_4＝ 324	0.1620
５の目が出る	r_5＝ 320	0.1600
６の目が出る	r_6＝ 326	0.1630
合　計	2000	1

各自計算してみよう

●「１の目が出る」場合に注目する。

①～⑤において、
Ｎの値の変化に伴い相対度数は
どのように変化しているか。
表にしてみよう。
また、グラフにしてみよう。

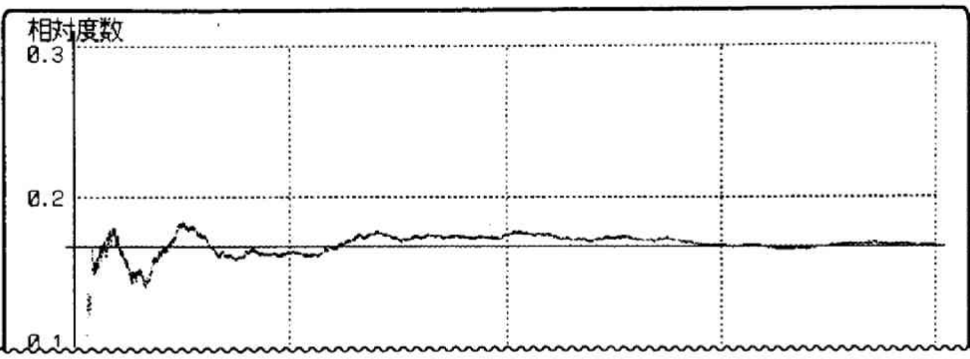
	試行回数 N	相 対 度 数
①	100	0.15
②	200	0.205
③	500	0.182
④	1000	0.164
⑤	2000	0.1745



ここで、Ｎの値をさらに大きくするとどのような結果を得るか。

直線ぽくなる

【実験Ⅱ】1個のさいころを5000回投げる試行について考える。
「1の目が出る」場合に注目し、Nの値の増加に伴う相対度数の変化を調べなさい。どのように変化しているか。



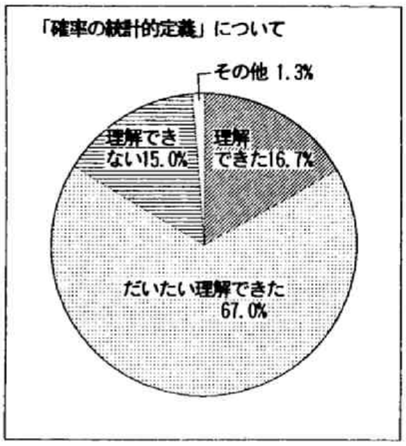
【実験Ⅲ】画びょうを投げる試行において、⊥(上向き)になる事象について相対度数を調べ、グラフからこの事象の起こる確率を求めよ。

$\frac{55}{100}$ = 0,55

6．まとめと今後の課題

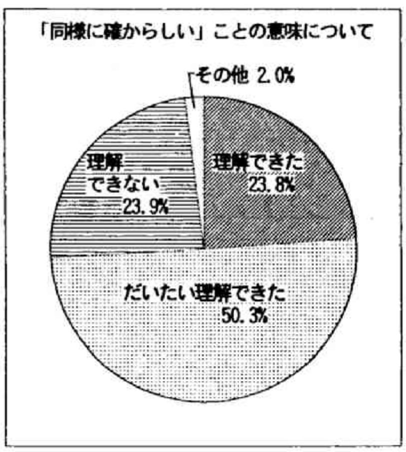
(1) さいころを何千回も投げる実験によって，1の目が出る場合の相対度数が一定の値に近づくことをグラフによって確認した。これによって統計的確率をほぼ理解させることができた。

実験Ⅲの画びょうを投げる試行においては，ほとんどの生徒が，グラフから統計的確率を求めることができた。

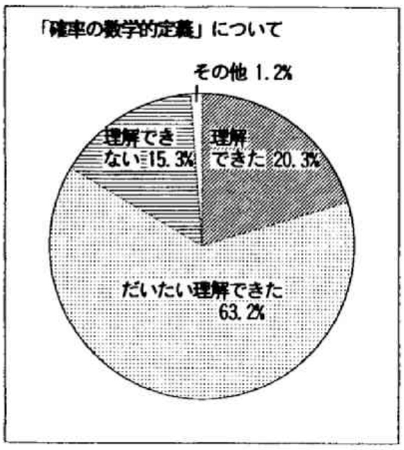


(2) 「同様に確からしい」という言葉には多少とまどいながらも，その意味を理解させ，数学的確率にスムーズに導くことができた。

ワークシートのさいころ投げの問題はほぼ全員が解けたものの，ワークシートにはない問題，たとえば，2枚の硬貨を投げて2枚とも表が出る確率を求めさせると，［表・表］［表・裏］［裏・裏］の3通りだから，確率は⅓（正解はこれ以外に［裏・表］があるので¼）とする生徒が以外に多く，「同様に確からしい」ことの意味を完全に理解できたとはいえない。しかしながら，これら

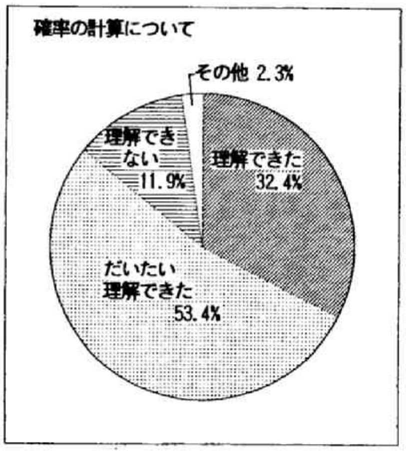


の生徒も説明をするとすぐに理解できる力はある。もっと多くの事例を示す必要を感じた。



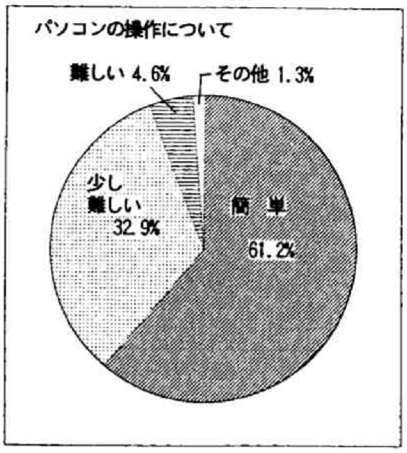
(3) 「数え上げ」によって確率を求めることはほとんど問題なく，これに関するワークシートの問題はほぼ全員が解くことができた。

しかしながら，「組合せ」を用いた計算については一度学習しているにもかかわらず，nCr の計算方法から説明をしなくてはならなかった。「確率」というより「組合せ」の指導方法について，検討の余地がある。



(4) 半数以上の生徒が今までにパーソナルコンピュータを操作したことがなかったので，ソフトを作る際に操作性について十分留意した。そのため，ほとんどの生徒が戸惑うことなく使うことができた。

与えられた課題が終わった後も，時間に余裕のある生徒は試行回数をいろいろ変化させるなどして，自主的に工夫していた。



(5) アンケート調査結果からもパーソナルコンピュータを使った授業は，生徒にとって楽しいものであることがわかる。特に今回は，パーソナルコンピュータそのものに対する関心だけでなく，多数回の試行を短時間で行うことができ，結果を視覚的にとらえることができた点に興味をもったようである。教員にとっては，準備や対応などでとても大変であるが，視点を変えて関心を高めるという点では効果があった。

〈生徒の声〉

- 今までにないやり方で興味がわいた
- グラフがすぐに出るのでわかりやすい
- パソコンを覚えたい
- パソコンと数学を同時にやられると，頭のなかで整理がつかない