高等学校

平成 7 年度

教育研究員研究報告書

数　　学

東京都教育委員会

平成７年度教育研究員（数学）名簿

班	研究テーマ	学校名	氏名
Ⅰ	量として捉える三角比の指導－三角関数へのスムーズな移行をめざして－	都立大森高等学校	中嶋康雄
		都立南高等学校	伊東佳名子
		都立世田谷工業高等学校	稲垣彰
		都立江北高等学校	奥村英夫
Ⅱ	平均変化率に極限の考え方を適用し、微分係数が求まるまでの過程を理解させる指導	都立深沢高等学校	臼田三知永
		都立池袋商業高等学校	五味淳
		都立水元高等学校	山田芳嗣
		都立葛西南高等学校	和嶋延寿
		都立調布南高等学校	河田健雄
Ⅲ	複素数の演算を幾何学的側面から捉えることにより、数学的な見方や考え方を育てる指導	都立大崎高等学校	逸見由紀子
		都立西高等学校	泉泰吉
		都立杉並高等学校	高橋和久
		都立練馬高等学校	幸田諭昭
		都立深川高等学校	長浜一夫

担当　教育庁指導部高等学校教育指導課指導主事　　吉野恒夫

主題　基礎・基本の定着を図り、学習意欲を高める個に応じた指導方法の工夫

目　次

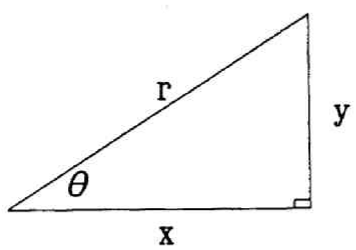
Ⅰ　量として捉える三角比の指導
－三角関数へのスムーズな移行をめざして－

1．はじめに

三角比は、「生徒の日常に関係が深く、学習することの意義がわかりやすい内容」であるとして、学習指導要領では必履修科目の「数学Ⅰ」で取り上げられている。一方、これまでは、「三角比はよくわからない」という生徒の声も多く、三角比に関する定義や公式を意味を理解しないまま丸暗記する生徒を見かけたのも事実である。

三角比の学習が難しいと感じられる理由の１つとして、「直角三角形の辺の比の値としての三角比」（図１）が、数学を苦手としている生徒にとってはイメージしづらいということがあげられる。そこで、本研究ではこの点を改善し、生徒が理解し易い三角比の指導について考えることにした。

（図１）　三角比の定義その１　「辺の比としての三角比」



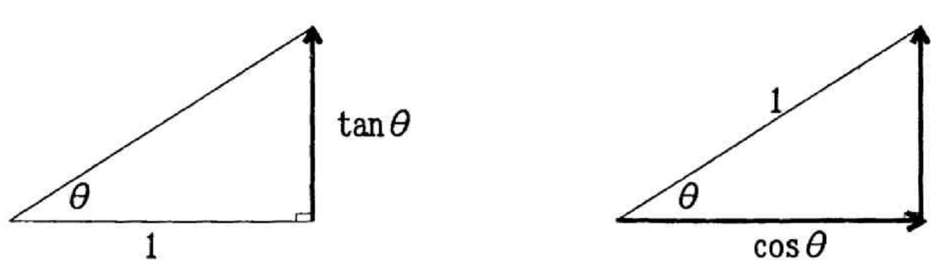
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

2．研究のねらい

しばしば、教える側から、「三角比（辺の比の値）から三角関数（単位円の使用）への移行がスムーズにできない」という声が聞かれる。そこで、本研究では最初から図２のような三角比の定義を採用し、授業を進めることにした。三角比をイメージのし易い、つまり、大小関係や値の変化を直接的に感じることができる、一つの「量」として把握し、そのことを常に念頭に置きながら活用できるようにすることをねらいとした。

（図２）　三角比の定義その２



3．研究内容・方法

以上のねらいを踏まえ、指導内容を次のように定めた。

① タンジェントの導入・定義

② タンジェントの値を実測させる課題（５(3)ア）

③　角度測定器を使った、物の高さの測定（校庭にて実習）（5(1)、(2)）

④　タンジェントを使った練習問題

⑤　サイン、コサインの導入、定義（6(1)）

⑥　サイン、コサインの値を実測させる課題（5(3)イ、6(2)）

⑦　サイン、コサインを使った練習問題

⑧　三角比の値の変化（0°～90°）（6(3)）

⑨　鈍角の三角比（5(3)ウ、6(4)）

⑩　三角比の変化（0°～180°）（6(5)）

⑪　三角比の再考（辺の比の値として）と特別な角（30°、45°、60°）の三角比

⑫　三角比の相互関係

また、指導に当たっては、次のことに配慮した。

ア　実測や測量などの作業を多く取り入れたこと。（②、③、⑥）

イ　⑩までは、三角比の値を一貫して少数中心に扱ったこと。（計算には電卓使用）

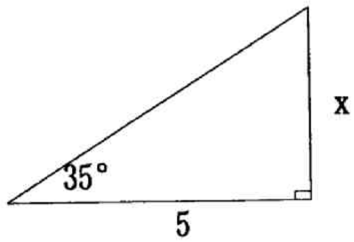
ウ　⑧、⑩では、サイン、コサインの値をグラフ化させたこと。

これらはいずれも、三角比の「量」としての一面を印象づけ、生徒の内面に三角比の値についてのイメージが形成されることを期待してのことである。

また、⑩までは、「角度→三角比の値→辺の長さ」という考え方を中心に扱うが、⑪では、「辺の長さ十三角比の値（→角度）」という考え方も扱う。その中で、三角比の「辺の比の値」としての定義（図1）も指導し、三角比の値について「1あたりの量」的な見方と、「比の値」的な見方をクロスオーバーさせ、生徒の内なる数量の世界を豊かにすることができるよう配慮した。

4．定義の違いによる問題へのアプローチの違い（タンジェントの場合）

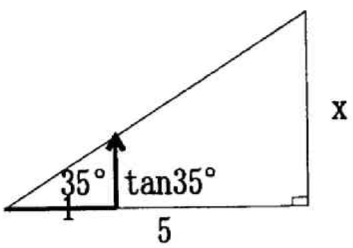
（図1の場合）



$\dfrac{\text{対辺}}{\text{底辺}}$ が　tan35°　だから、

$\dfrac{x}{5} = \tan 35°$　　ゆえに　　$x = \tan 35° \times 5$

（図2の場合）



底辺の長さが1のときの対辺の長さが　tan35°　だから、

底辺の長さが5のときの対辺の長さは、

$x = \tan 35° \times 5$

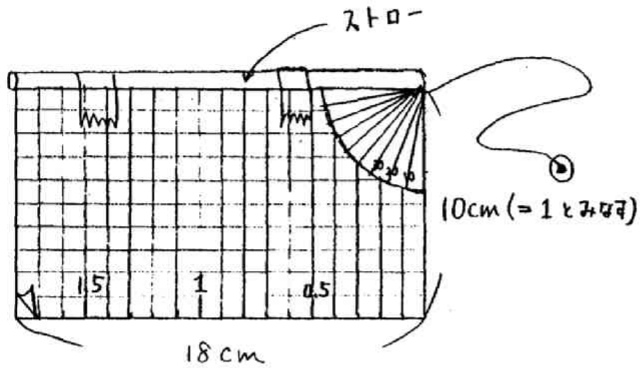
5．教材・教具の工夫

(1) 角度測定器

三角比を量として捉えさせるために、作業を通して値を求めたり、物の高さを測定するといった実践的な授業を心掛けた。ここでは、導入部分の授業で行った測量、とくに角度の測定で使用した教材・教具－角度測定器－について説明する。従来から、分度器に５円玉などのおもりをつけた糸をたらして仰角を測る、簡易的な角度測定器は知られているが、本研究では、仰角を測ると同時にtan θの値も分かる角度測定器を使用した。

これは、次ページの５(3)のワークシートの（ア）と同じものを厚紙に張り、ストローで覗くものである。

〔角度測定器〕



(2) 角度測定器による授業実践

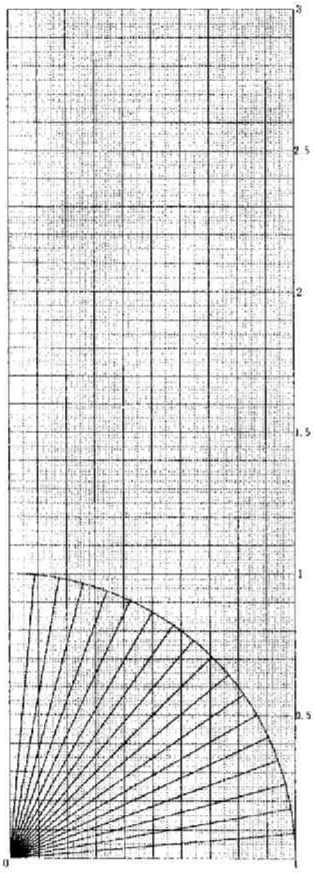
まず、角度測定器を生徒自身に作成させた。そして、この測定器を用いて校内の木の高さや建物の高さなどを測定させ、その結果をレポートにまとめさせるとともに授業の感想を書かせた。実際には、測定物の高さは、測定者の目の高さを加える必要があることをあらかじめ説明しておいた。

（実習風景１）

（実習風景２）

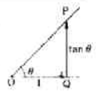
(3) 三角比の値を実測させるワークシート

（ア）



番 氏名

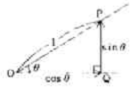
右の図で、角 θ がわかっているとする。
点Oから、水平方向に1だけ進んだときの垂直距離ＱＰを
$\tan\theta$
と表し、タンジェント・シータと読む。



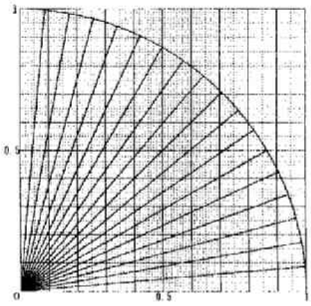
$\tan 0^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 5^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 10^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 15^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 20^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 25^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 30^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 35^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 40^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 45^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 50^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 55^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 60^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 65^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 70^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 75^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 80^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 85^\circ$ =（　　）=（　　）
$\tan 90^\circ$ =（　　）=（　　）

（イ）

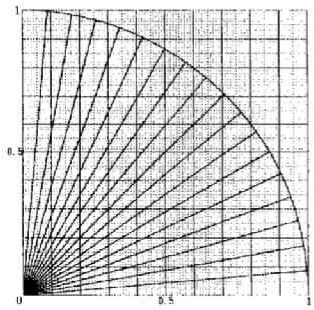
番 氏名



左の図のように、点Oから角 θ の斜辺を1進んだときの
垂直距離ＱＰを $\sin\theta$、
水平距離ＯＰを $\cos\theta$、
と表し、それぞれ サイン・シータ、コサイン・シータと読む。



$\sin 0^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 5^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 10^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 15^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 20^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 25^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 30^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 35^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 40^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 45^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 50^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 55^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 60^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 65^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 70^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 75^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 80^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 85^\circ$ =（　　）=（　　）
$\sin 90^\circ$ =（　　）=（　　）



$\cos 0^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 5^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 10^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 15^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 20^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 25^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 30^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 35^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 40^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 45^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 50^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 55^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 60^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 65^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 70^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 75^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 80^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 85^\circ$ =（　　）=（　　）
$\cos 90^\circ$ =（　　）=（　　）

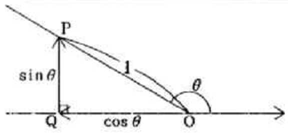
（ウ）

番 氏名

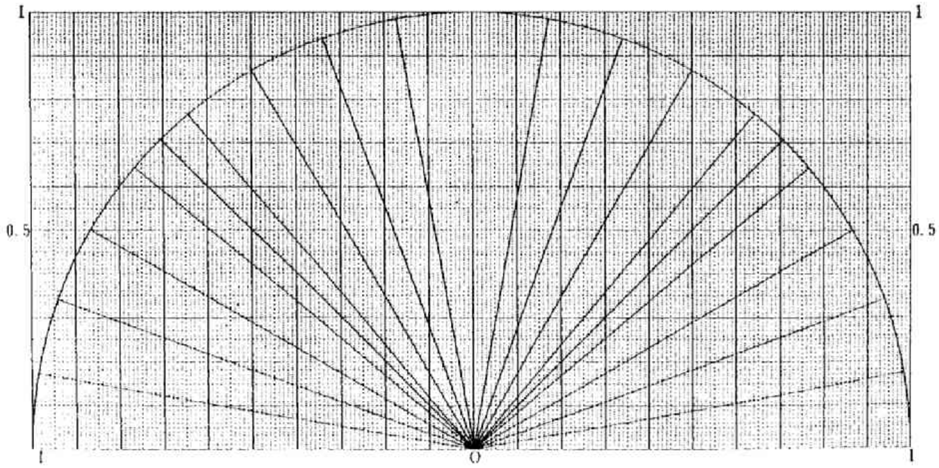
右の図のように、点Oから鈍角 θ の斜辺を1進んだとき、水平方向には左向きに進む。このとき、水平方向に右向きに進むときを ＋ 、左向きに進むときを － と決めることにすると、水平方向の移動距離は － となる。この規則のもとで、鈍角の $\sin\theta$, $\cos\theta$ を鋭角と同じように定義する。すなわち、点Oから鈍角 θ の斜辺を1進んだときの

垂直距離ＱＰを $\sin\theta$、　　水平距離ＯＱを $\cos\theta$、

と表すことにする。



したがって、角 θ が鈍角のとき、$\sin\theta$ は ＋の値、$\cos\theta$ は － の値をとることになる。

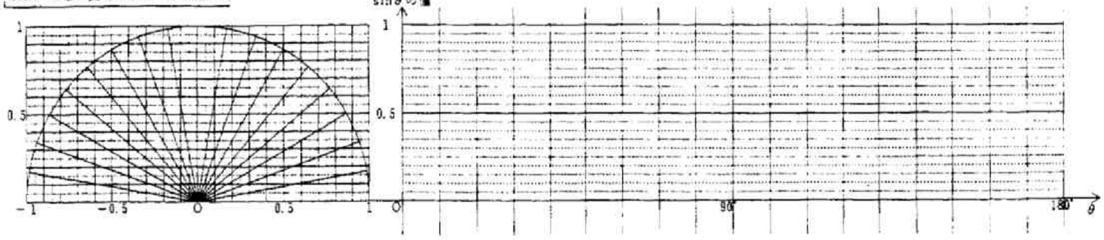


(4) 三角比の値の変化（サインとコサイン）

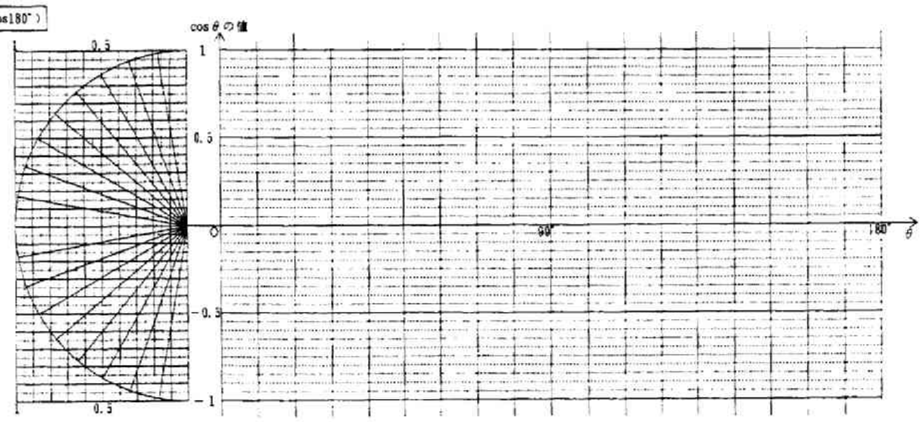
番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

（ sinθ, cosθ の値の変化をグラフにしてみよう）

sinθ の値の変化（sin0°～sin180°）



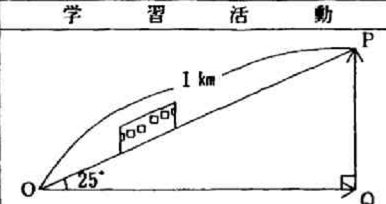
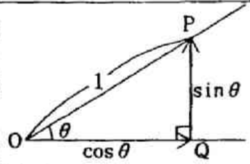
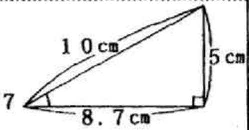
cosθ の値の変化（cos0°～cos180°）



6．指導案

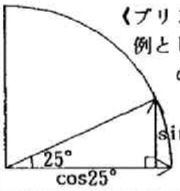
(1) 実施科目：数学Ⅰ（第１学年必修科目）　　　単元：「図形と計量」（正弦と余弦・１時限目）

本時の目標：縮図を描いて距離を求めることより導入し、sinθ, cosθ を定義する。

時間	指　導　内　容	学　習　活　動	評 価 の 観 点 及 び 留 意 点
25分	垂直方向の移動距離(sinθ)、 水平方向の移動距離(cosθ)、 を意識させる。 「ある山のケーブルカーは山麓のO駅から山頂のP駅まで、山の斜面を１km登る。斜面の傾斜は一定で２５°である。ケーブルカーは、O駅からP駅まで、垂直方向にどれだけ進んだか。また、水平方向にどれだけ進んだか。」 以上の問題を提示する。 縮図を描いて求めさせる。	 (分度器、定規を用いて各自作図する。) OP＝１０cm(1kmを１０cmとする)として縮図を描く。これを実測して、 PQ＝4．2cm、OQ＝9．1cm を得る。 これより、実際の垂直方向の移動距離 PQ＝0．４２km、垂直方向の移動距離 OQ＝0．９１km を求める。	縮図を描いて距離を求める考え方は tanθの導入でも使っている。 縮図を利用して、実際の距離を求めることができたか。 (数学的な考え方) (表現・処理)
15分	sinθ, cosθ の定義を示す。 点Oから斜辺を１進んだときの垂直距離QPをsinθ,水平距離OQをcosθと定義する。 	sin25°, cos25° の値を確認する。 (導入より、sin25°＝0．４２, cos25°＝0．９１)	斜辺の長さが１あたりの垂直距離、水平距離であることを強調する。
10分	まとめの問題 sin30°, cos30° の値を実測により、求めさせる。	縮図を描き、 実測により、 sin30°＝0．5 cos30°＝0．８７ を求める。 	sinθ, cosθ の定義を理解できたか。 (知識・理解)

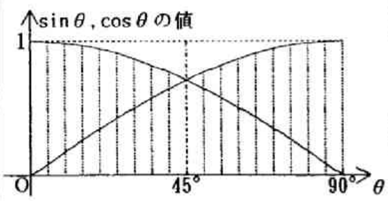
(2) 実施科目：数学Ⅰ（第１学年必修科目）　単元：「図形と計量」（正弦と余弦・２時限目）

本時の目標：$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を実測する。

時間	指導内容	学習活動	評価の観点及び留意点
5 分	前時の$\sin\theta$, $\cos\theta$の定義の確認をする。	$\sin\theta$, $\cos\theta$の定義を復習する。	$\sin\theta$, $\cos\theta$の定義を理解していたか。 （知識・理解）
25 分	本時の内容説明及び作業 いろいろな角度の $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を自分で測りまとめる。 《プリント配布》 例として、$\sin 25^\circ$, $\cos 25^\circ$ のやり方を板書する。 	配布したプリント（5.（3）イ.参照） $\sin 25^\circ = 0.42$ $\cos 25^\circ = 0.91$ の実測のやり方が理解できたら、他の角度（5°きざみ）の実測を開始する。 実測した値をプリントに記入する。	$\sin\theta$, $\cos\theta$の定義を正しく理解し、$\sin\theta$, $\cos\theta$の実測値を実測できるか。 （関心・意欲・態度） （表現・処理）
10 分	教科書巻末の三角比の表を紹介し、実測値と照合する。	実測値の隣に三角比の表の値を記入する。 実測値　三角比表の値 $\sin 0^\circ$＝(　　)＝(　　) $\sin 5^\circ$＝(　　)＝(　　) ……………	三角比の表を使って三角比の値を正しく得ることができるか。 （表現・処理）
5 分	作業より気づいた事をまとめさせる。 →プリントを提出させ、次の授業の参考にする。	各自の作業を通して、また三角比の表の値から気づいたことをまとめ、メモする。	三角比を値として認識できたか。 （数学的な考え方）

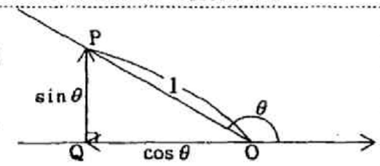
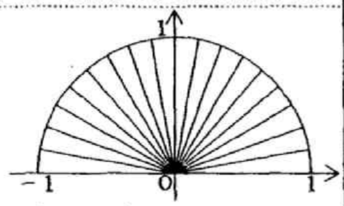
(3) 実施科目：数学Ⅰ（第１学年必修科目）　単元：「図形と計量」（正弦と余弦・３時限目）

本時の目標：$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値の変化の特徴を認識する。

時間	指導内容	学習活動	評価の観点及び留意点
10 分	始めに数値だけをみて、$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値の変化の特徴を考えさせる。 《発問内容》 「$\sin 0^\circ$～$\sin 90^\circ$の値はどのように変化しているか。」 「$\cos 0^\circ$～$\cos 90^\circ$の値はどのように変化しているか。」 《次の発問内容》 「角度と同じ割合で、$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値も変化しているか。」 「例えば、$\sin 60^\circ$は $\sin 30^\circ$の２倍になっているか。」	返された前時の $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を実測したプリントで、5°きざみの 0°～90° $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値の変化を見る。 これをもとに発問する。 《予想される答え》 「$\sin\theta$は０から１まで増加する。」 「$\cos\theta$は１から０まで減少する。」 「$\sin\theta$の値と $\cos\theta$の値の並びが逆さである。」	等差数列的な変化でないことを気づかせ、グラフを描くことの必要性へと導く。 三角比の値の変化を観察する態度があったか。 （関心・意欲・態度）
25 分	$\sin\theta$, $\cos\theta$の値を座標軸上にとり、値の変化の様子を視覚化し明らかにする。	プリント配布（座標軸のみのもの） 	5°きざみで $\sin\theta$, $\cos\theta$の値を座標軸上にとれるか。（表現・処理） $\sin\theta$と$\cos\theta$のグラフの色を変えて描かせる。 $\sin\theta$, $\cos\theta$の値の変化を観察する態度があったか。 （関心・意欲・態度）
10 分	$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$を導く。 $\sin\theta$, $\cos\theta$の値の変化の特徴をまとめる。	グラフを見て、再度変化の特徴を確認し、45°のラインを境に $\sin\theta$, $\cos\theta$ のグラフが線対称であることから、 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ を確認する。	$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ が理解できたか。 （数学的な考え方） （知識・理解）

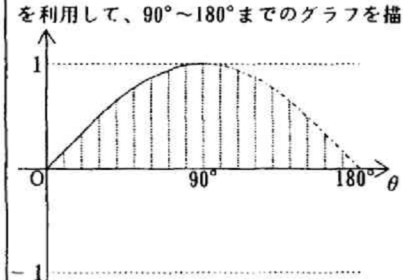
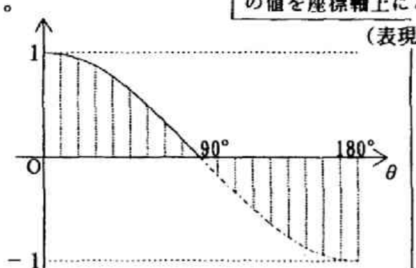
(4) 実施科目：数学Ｉ（第１学年必修科目）　　　単元：「図形と計量」（鈍角の三角比・１時限目）

本時の目標：鋭角のsinθ, cosθの定義を拡張して、鈍角のsinθ, cosθを定義し、鈍角のsinθ, cosθを実測する。

時間	指導内容	学習活動	評価の観点及び留意点
5分	鋭角の sinθ, cosθの定義を確認する。	鋭角の sinθ, cosθの定義、角θの斜辺を１だけ進んだときの垂直距離が sinθ、水平距離が cosθであることを復習する。	鋭角の sinθ, cosθの定義を理解していたか。
10分	90°〜180°までの sinθ, cosθの値の決め方を、鋭角の sinθ, cosθの定義を参考に考えさせる。 鈍角の sinθ, cosθを定義する。	点Oから鈍角θの斜辺を１だけ進んだとき、水平方向には左向きに進むので、これを負の向き決めると、水平距離ＯＱは－の値となることを確認する。鈍角の sinθ, cosθを鋭角のときと同じように、点Oから角θの斜辺を１だけ進んだときの垂直距離ＱＰをsinθ、水平距離ＯＱを cosθと定義する。  このときsinθ は＋の値、cosθ は－の値をとることに注意する。	点Oから鈍角θの斜辺を１だけ進んだとき、水平距離は－の値となることを理解できたか。 （数学的な考え方） 鈍角の sinθ, cosθの定義を理解できたか。 （知識・理解）
20分	鈍角の sinθ, cosθの値の実測を通し、鋭角と鈍角の sinθ, cosθの値の関係に気づかせる。	方眼紙の単位円に0°から180°までの10°きざみの角度が描いてあるプリント（５．（３）ウ．参照）を配布し、これをもとに0°から180°までの10°きざみの sinθ, cosθ の値を実測する。  実測値をプリントの表に記入する。 sin0° ＝（　　），cos0° ＝（　　） ……………………　…………………… sin180°＝（　　），cos180°＝（　　）	鈍角の sinθ, cosθの値を実測できたか。 実測を通し、鋭角の sinθ, cosθの値をもとに鈍角の sinθ, cosθの値を求められることに気づいたか。 （数学的な考え方） （表現・処理）
10分	sin(180°－θ)＝sinθ cos(180°－θ)＝－cosθを導き、本時のまとめをする。	sin30°＝cos150°などの例を出して sin(180°－θ)＝sinθ cos(180°－θ)＝－cosθ　を示す。	鋭角と鈍角のsinθ, cosθの値の関係が理解できたか。　（知識・理解）

(5) 実施科目：数学Ｉ（第１学年必修科目）　単元：「図形と計量」（鈍角の三角比・２時限目）

本時の目標：鋭角のsinθ, cosθの値の変化の特徴を認識する。

時間	指導内容	学習活動	評価の観点及び留意点
5分	sin(180°－θ)＝sinθ, cos(180°－θ)＝－cosθ を復習する。	前時に学習した、sin(180°－θ)＝sinθ, cos(180°－θ)＝－cosθ を確認する。	sin(180°－θ)＝sinθ, cos(180°－θ)＝－cosθ を理解していたか。
25分	以前描いた0°〜90°の sinθ cosθのグラフの続きとして90°〜180°のsinθ, cosθのグラフを sin(180°－θ)＝sinθ, cos(180°－θ)＝－cosθ 利用して描かせる。 0°〜180°までの sinθ, cosθ の値の変化の様子を視覚的に捉えさせる。	プリント配布（５、（４）参照） 前時の内容 sin(180°－θ)＝sinθ, cos(180°－θ)＝－cosθを利用して、90°〜180°までのグラフを描く。   	0°〜90°のsinθ, cosθの値をもとに、90°〜180°までの値を座標軸上にとれるか。 （表現・処理）
15分	0°〜180°までの sinθ, cosθ の値の変化の特徴をグラフより確認し、まとめる。	sinθの値の変化の特徴は、常にsinθ≧0であり、また、0°〜90°では0から１まで増加し、90°〜180°では１から０まで減少する。 cosθの値の変化の特徴は、－１≦cosθ≦１であり、また、0°〜180°で１から－１まで減少する。	0°〜180°までの sinθ, cosθ の値の変化の特徴を理解できたか。 （知識・理解）

7．分析と考察

(1) 作業を通して得られたもの

「三角比を量として実感させたい。」との考えのもと、作業の多い授業展開となったが、教師が示唆する前に、作業を通して生徒は様々なことを気付いていた。

例えば、タンジェントの値は角度に比例していないこと（5(3)（ア)、0°から90°の範囲でサインの値の並びとコサインの値の並びが逆になっていること（5(3)（イ)、実際、この作業でコサインの値を最後まで図から読み取っている者はほとんどなく、サインの値をもとに空欄を埋めている。）などである。また、5(3)（イ)、(ウ）に関しては、作業を終えた後に$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$、$\sin\theta=(180^\circ-\theta)$、$\cos\theta=-\cos(180^\circ-\theta)$の公式を紹介したが、例年より抵抗なく受け入れられたようである。

また、数Ⅰの範囲からは少し逸脱するが、$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$のグラフをかかせてみた。結果は、今回採用した定義による方法でグラフに無理なく移行できたと考えている。また、三角比の値の増減の様子、$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$において$0\leqq\sin\theta\leqq1$、$-1\leqq\cos\theta\leqq1$であること、変化は直線的でないことなどが目に見える形で再確認出来たという点でも意義があったと思われる。テストなどでも、0°、90°、180°の三角比の値についての誤答（$\sin180^\circ=2$など）が例年に比べて少なかったことも、これらの一連の作業の効果ではないかと考えている。

(2) 角度測定器を用いた物の高さの測定の意義

校庭での測定実習の後、生徒に書かせた感想を見ると「こんな簡単なもので物の高さが測れるなんて驚きだ。」「タンジェントが身近になったように感じた。」というものが多く、この実習は生徒にとって新鮮で印象深かったようである。また測定の際、測定物から測定者までの距離をすべて10mにして後の計算が楽になるようにしたり、同じ測定物に対しても測定する位置をいろいろ変えて測り結果を比較してみるなど、教師の指示以外にも生徒なりに工夫し、自主的に活動している姿も見受けられた。このような面からも、この実習は意義があったと考えられる。

8．まとめ

作業を多く取り入れ、三角比を量として実感させイメージとして把握し易いものにしたいという今回のねらいは、生徒の反応を見る限りかなり達成されたように思う。授業後の感想を見ても、一連の作業について大多数の生徒が肯定的に受けとめている。「三角比は具体的で分かりやすかった。」「自分の体を動かして得たものは良く分かるので、これからもこのような作業を多くしてほしい。」との感想が得られた。また、今回の学習内容を授業で実践した高校の一つであるK高校定時制のあるクラスには、以前に三角比を学んだことのある生徒が2人いたが、2人の感想は「以前は公式をただ暗記してしまい中身が分からなかったが、今回は良く分かった。」「自分で理解していることを実感できた。」というものであった。その他、日頃数学に対して苦手意識が強く取り組みが消極的な生徒も、作業をした後はある種の達成感もあって数学に対する拒絶感が薄らいだようで、問題練習に対する取り組みも良くなったように感じられた。この期を逃さず、タイムリーな（作業内容に関連した）より質の高い問題を提示し考えさせることが、生徒の数学に対する感覚を高めることになる。そして、「質の高い問題」の内容を考え出していくことが今後の課題である。

Ⅱ　平均変化率に極限の考え方を適用し、微分係数が求まるまでの過程を理解させる指導

1．研究のねらい

科学技術の発達や情報化の進展に伴い、様々な分野で幅広い数学的な素養が必要とされている。このため、高等学校数学では、数学的な見方や考え方を育てることにより、事象を正確に把握し数学的に考察して処理する能力の育成が求められている。

数学Ⅱの学習内容の一つに「関数の値の変化」がある。ここでは新たに極限の考え方が登場し、微分係数や導関数の概念を導き理解させることが一つの目標になっている。平均変化率に極限の考え方を適用し、ある点における変化率すなわち微分係数を求めて関数の値の変化の様子を調べるという発想は、生徒にとって画期的なものである。

このような観点に立ち、本研究では、「関数の値の変化」の学習を通して、数学的な見方や考え方を認識させ、数学的に考察し処理する能力を高めることをねらいとして、教材や指導方法を工夫した。

2．研究内容・方法

研究内容及び方法は以下の通りである。

(1)　教科書に書かれている、極限値、平均変化率、微分係数に関する内容の分析を行った。

(2)　この学習に必要な基礎的な知識や学力について、テストを実施して調査した。

(3)　(1)、(2)を踏まえ、次の2案によるワークシートを作成した。

　①　関数中心の案 …………………………… 関数やそのグラフを中心に学習する案

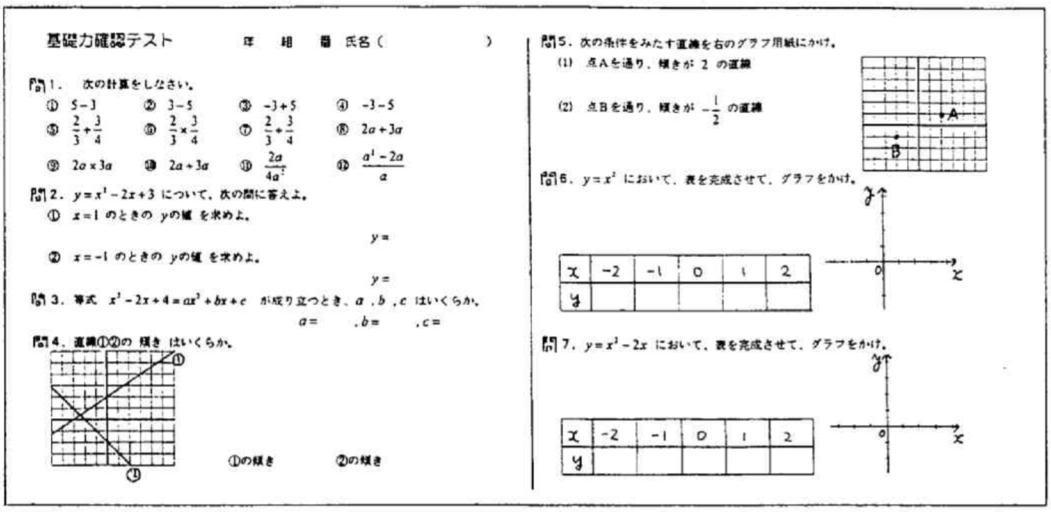
　②　物理的な事象を扱った案 …………… 物体の上昇・落下の様子を想像しながら、速度の考えを利用して学習する案

(4)　A高校とB高校において、作成したワークシートを用いて授業を行った。実施方法は下記の通りで、①の案と②の案を同時に別々のクラスで実施した。

	①　の　案	②　の　案
A　高　校 （全日制商業科）	2学年、7学級 （数学は必修）	3学年、1学級 （数学は選択）
B　高　校 （定時制普通科）	3学年、1学級 （数学は必修）	3学年、1学級 （数学は必修）

(5)　アンケート調査を行い、理解のされ方や①の案と②の案の長所・短所などについて分析・考察を行った。

3．基礎力確認テストと集計結果



基礎力確認テスト　　年　組　番 氏名（　　　　）

問1．次の計算をしなさい。

① $5-3$　② $3-5$　③ $-3+5$　④ $-3-5$

⑤ $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$　⑥ $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$　⑦ $\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}$　⑧ $2a+3a$

⑨ $2a\times 3a$　⑩ $2a\div 3a$　⑪ $\frac{2a}{4a^2}$　⑫ $\frac{a^2-2a}{a}$

問2．$y=x^2-2x+3$ について、次の問に答えよ。

① $x=1$ のときの yの値 を求めよ。　$y=$

② $x=-1$ のときの yの値 を求めよ。　$y=$

問3．等式 $x^2-2x+4=ax^2+bx+c$ が成り立つとき、a，b，c はいくらか。

$a=$　，$b=$　，$c=$

問4．直線①②の 傾き はいくらか。

①の傾き　②の傾き

問5．次の条件をみたす直線を右のグラフ用紙にかけ。

(1) 点Aを通り、傾きが 2 の直線

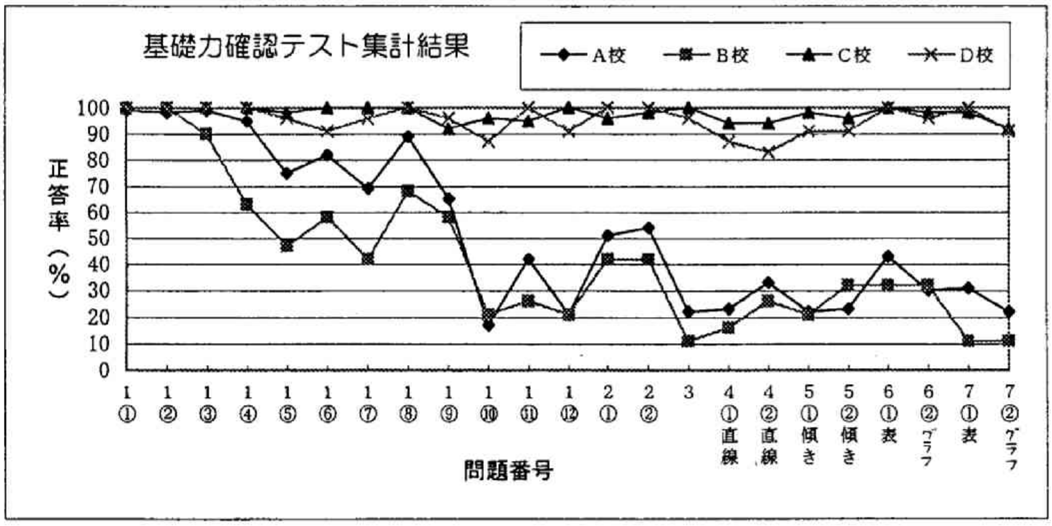
(2) 点Bを通り、傾きが $-\frac{1}{2}$ の直線

問6．$y=x^2$ において、表を完成させて、グラフをかけ。

x	-2	-1	0	1	2
y					

問7．$y=x^2-2x$ において、表を完成させて、グラフをかけ。

x	-2	-1	0	1	2
y					



基礎力確認テストを４校で実施しその結果を集計した。対象となったのはＡ校（全日制商業科：２年170名、３年10名）、Ｂ校（定時制普通科：３年27名）、Ｃ校（全日制普通科：３年理系63名）、Ｄ校（全日制普通科：３年理系23名）である。今回のワークシートはＡ校とＢ校の生徒を前提として作成したので、これらの２校の結果から気付いたことを以下にあげる。

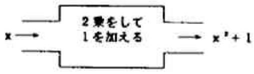
問１の計算問題では、⑩ $2a\div 3a$を分数に変形できない、⑫ $\frac{a^2-2a}{a}$ の約分が間違っているのが目立った。⑨ $2a\times 3a$の文字式の乗法や、⑪ $\frac{2a}{4a^2}$の約分はできているが、式の形が少し変化するとできなくなる生徒が多い。特に⑫の計算は平均変化率等で何度もでてくる。問２はよくできていた。$1^2=2$ と答えた生徒が $(-1)^2=1$ はできているという例も何件かあり、(負の数字)^2 に関して特に注意している様子がうかがえた。問３は問題文の意味（係数比較）を理解できていない生徒が多く、無解答が目立った。問４、問５の直線の傾きに関しては、正負の符号の違いは正解率にはあまり影響しないことが分かった。むしろ傾きが分数より整数の場合に誤答が多かった。問６、問７は、表やグラフの一部分はできていても正解には達しない生徒が多かったが、まったくできない生徒は少数であった。

4．ワークシート

(1) 関数中心の案（抜粋）

関数の値 (No. 2)

①左からある数 x を入れると、左から2乗して1を加えた数 x^2+1 が出てくる機械がある

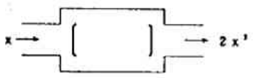


$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow x^2+1$　　この機械のかわりに $f(x)$ と書くとこうなります。

$1 \longrightarrow f(1) \longrightarrow 1^2+1=2$

（問1）次の問に答えよ。

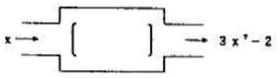
(1) $f(x)=2x^2$ はどんな機械か。上を参考にして答えよ。



$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow 2x^2$

$1 \longrightarrow f(1) \longrightarrow ($　　　　　$)=($　　$)$

(2) $f(x)=3x^2-2$ はどんな機械か。(1) と同様に答えよ。



$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow 3x^2-2$

$1 \longrightarrow f(1) \longrightarrow ($　　　　　$)=($　　$)$

$-1 \longrightarrow f(-1) \longrightarrow ($　　　　　$)=($　　$)$

$0 \longrightarrow f(0) \longrightarrow ($　　　　　$)=($　　$)$

$a \longrightarrow f(a) \longrightarrow ($　　　　　$)$

②　一般に x の関数を $f(x)$ と表すことがある。

$y=2x^2 \rightarrow f(x)=2x^2$　　（y と $f(x)$ は同じ意味）

x のかわりに、数字を代入し計算することができるし、他の文字を代入することもできる。

（例）$f(x)=3x^2$ のとき

$f(1)=3\times1^2=3\times1=3$
x のかわりに
1を代入

$f(-1)=3\times(-1)^2=3\times1=3$
x のかわりに
-1 を代入

$f(a)=3a^2$
x のかわりに
a を代入

$f(1+h)=3\times(1+h)^2$
$=3\times(1+2h+h^2)$ ←展開
$=3+6h+h^2$

（問2）

(1) $f(x)=x^2$ のとき、次の値を求めよ。

① $f(3)$　　② $f(-2)$　　③ $f(0)$

(2) $f(x)=-2x^2$ のとき、次の値を求めよ。

① $f(3)$　　② $f(-2)$　　③ $f(0)$

④ $f(a)$　　⑤ $f(1+h)$

極限値 (No. 4)

①　$f(x)=x^2$ において、x が1に近づくとき $f(x)$ の値がいくつに近づくか

下の表を完成させて、調べてみよう。

x	…	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	…
$f(x)$	…	0.81						1.21	…

この表から $f(x)=x^2$ において x が1に近づくとき、$f(x)$ は（　　）に近づくことがわかる。

これを極限値といい、記号を使うと次のように書く。

$\lim_{x\to1} x^2 = ($　　　$)$　　リミットx矢印1と読む

（問1）電卓を使って $f(h)=\dfrac{h^2+h}{h}$ において、h が0に近づくとき

$f(h)$ はいくつに近づくか。下の表を完成させよ。

h	…	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	…
$f(h)$	…								…

(1) 電卓を使って計算をしていて困ったことは何か。

(2) $f(h)=\dfrac{h^2+h}{h}$ において、h が 0 に近づくとき $\dfrac{h^2+h}{h}$ は

いくつに近づくか。表より推測せよ。

(3) $\lim_{h\to0}\dfrac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{h(\quad)}{h}=\lim_{h\to0}(\quad)=(\quad)$

②　極限値の計算は次のように行う。

（例）

(1) $\lim_{h\to0}(2h+3)=2\times0+3=3$
計算は $h=0$ を代入すればよい

(2) $\lim_{h\to0}3(h+2)=3\times(0+2)=3\times2=6$
かっこの中を先に計算

(3) $\lim_{h\to0}\dfrac{h^2-3h}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{h(h-3)}{h}=\lim_{h\to0}(h-3)=0-3=-3$

分母に h があるときは、まず約分をしてから h に0を代入する。

（問2）次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to0}(-h+3)$　　(2) $\lim_{h\to0}(2h-3)$

(3) $\lim_{h\to0}2(h-1)$　　(4) $\lim_{h\to0}4(h+2)$

(5) $\lim_{h\to0}\dfrac{5h+h^2}{h}$　　(6) $\lim_{h\to0}\dfrac{\{3(1+h)^2-4\}-(3\times1^2-4)}{h}$

(2) 物理的な事象を扱った案（抜粋）

物体Aを、地表より秒速40m（40m／s）で真上に打ち上げた。

物体Aの打ち上げ後の高さや速さは、時間による関数と考えられる。実は、物体Aの打ち上げx秒後の高さy（m）は

$$y=40x-5x^2$$

で求められることが分かっている。

問2　打ち上げたとき（x＝0）から落下、着地するまでの1秒ごとの高さを求めて表にしなさい。

物体Aの平均の速さを求めることから、瞬間の速さの求め方について考えてみよう。

問4　物体Aについて、打ち上げ後の次の時間における平均の速さを求めなさい。

(1) 2秒から4秒　(5) a秒からb秒

問5　問4(5)で求めた式を用いて、打ち上げ後の次の時間における平均の速さを求めなさい。

(1)　2秒から2.1秒　(5)　2秒から2.0001秒

(6)　(1)から(5)の結果を見て気づいたことを書きなさい。

例題　物体Aの打ち上げ1秒後の瞬間の速さを次の手順により求めなさい。

(1)　1秒と1＋h秒間の平均の速さを求めなさい。

(2)　(1)で求めた式において、hの値を限りなく0に近づけるとどうなるか考えなさい。

問7　例題の手順にしたがって、物体Aが打ち上げられてから次の時間における瞬間の速さを求めなさい。

(1) 2秒　(4) x秒

一般の関数において、先に考えた平均の速さや瞬間の速さに当たるものにはどんな意味があるのか、考えてみよう。

問9　問8の表やグラフを見て答えなさい。

- f（x）の平均的な変化の割合は（　　　）で求まる。この値をxの値がaからbまで変わるときのf（x）の平均変化率という。
- x－y平面上では平均変化率は（　　　）を意味する。

問10　次の関数f（x）において、与えられた条件のときの平均変化率を求めなさい。

（4）$f(x)=x^2$においてx＝a からx＝b

問11　$f(x)=x^2$でxの値が次のように変化するとき、問10(4)の結果を用いて平均変化率を求めなさい。

(1) x＝1から x＝1.2　(4) x＝1から x＝1.001

関数 f（x）も、xの値の変化につれてその値が変化するので、瞬間の速さにあたるものを考えてみよう。

例題　関数$f(x)=x^2$においてx＝1のときの瞬間の変化について考えてみよう。

（hは極めて小さい数とする。）

(1)　xの値がx＝1からx＝1＋hまで変化したときの平均変化率を求めなさい。

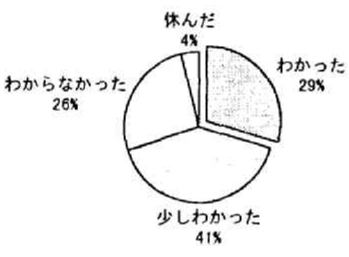
(2)　ここでhの値を限りなく0に近づける。これより求められた値を関数$f(x)=x^2$のx＝1における変化率（微分係数）という。

5．実践報告とまとめ

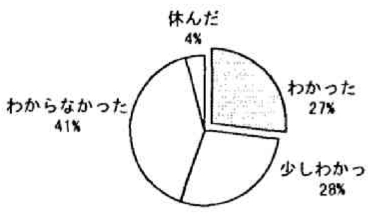
(1) 関数中心の案

ワークシート	授業をする際に留意した点	ワークシートについて気づいた点・改良点など	授業を行っての感想
2次関数のグラフ	① 点をとることでグラフがかけることを理解させる。 ② グラフをかくことで関数の変化の様子が分かることを理解させる。	① 説明・図が多くて、生徒の書くスペースが狭くなった。 ② 1枚のプリントには2次関数のグラフのみに絞った方が良い。 ③ 直線の傾きについてもう少し説明が欲しい。	① （x，y）の点をとれない生徒が意外と多かった。 ② 簡単な2次関数のグラフを思い出すのに時間がかかった生徒がいた。
関数の値	① ブラックボックスにより関数の意味・計算のやり方を理解させる。	① このプリントを先に指導した方が次のプリントとのつながりが良い。 ② どのようなものが関数かプリントでふれた方が良い。	① f（x）の計算のやり方が分かったようだった。 ② ブラックボックスに興味をもってくれた生徒が多かった。
平均変化率	① $\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}$ が平均変化率であることを理解させる。 ② 平均変化率の計算ができるようにさせる。	① 左側の例で放物線と直線が重なりあう感じになってしまうのでxの範囲を変えた方が良い。 ② 平均変化率が2点を結ぶ直線の傾きになることをもう少しうまく説明できないか。	① 数字だけの平均変化率は計算できたようだが、文字が入るとできなくなる生徒がいた。 ② 平均変化率の計算が何を示すものなのか理解させにくいので、視覚的要素をもっと盛り込むことが必要かも知れない。
極限値	① 極限の概念である限りなく近づけるという意味を理解させる。 ② $\frac{0}{0}$ となる極限値の計算をできるようにさせる。	① 電卓を使って細かい計算をさせることで極限のイメージがつかめたのではないか。 ② 電卓に現れるE（エラー）の意味をのせた方が良い。 ③ 近づく様子の理解のため、数直線を活用した方が良い。	① 電卓を使っての計算は、それなりの効果があったが、できない生徒もいた。 ② 簡単な極限の計算はできたが、hを約分するところがうまくいかない生徒がいた。 ③ 限りなく近づけるということが分かりにくかったようで、説明が難しかった。
微分係数	① 平均変化率と微分係数の関係を理解させる。 ② 微分係数の計算をできるようにさせる。	① グラフが細かくなり見にくい。 ② 例に（　）を入れ､生徒に書き込ませるようにした方が良い。 ③ もっとスペースをとり、練習問題を多くした方が良い。	① 平均変化率の求め方と微分係数の求め方を混乱している生徒がいた。 ② 計算が長くなると投げ出してしまう生徒がいた。
接線の傾き	① 微分係数がグラフ上では接線の傾きを意味することを理解させる。	① グラフ用紙をもう少し大きくかいて、接線を明らかにした方が良い。 ② OHPなどを用いて、グラフを拡大した方が見やすい。	① 接線をうまくひけない生徒が多い。 ② 微分係数の計算ができていない生徒は、接線の傾きも求められなかった。

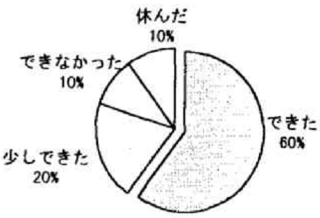
平均変化率の考え方はわかりましたか



平均変化率と微分係数の関係がわかりましたか



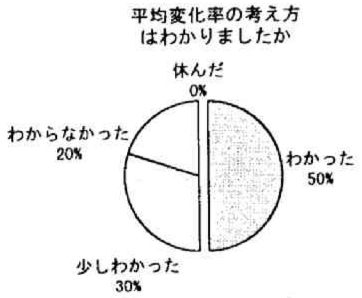
微分係数の計算ができましたか

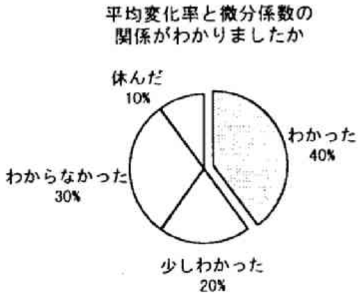


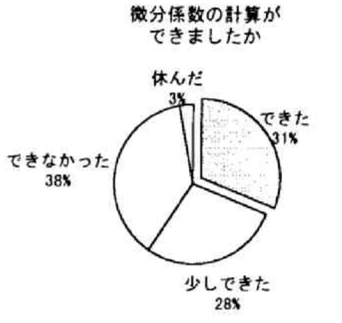
授業後のアンケート（関数中心の案）

(2) 物理的な事象を扱った案

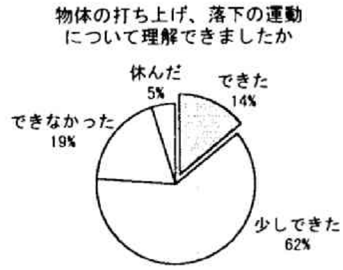
ワークシート	授業をする際に留意した点	ワークシートについて気づいた点・改良点など	授業を行っての感想
平均の速さ	① 物体の打ち上げ・落下運動をイメージさせる。 ② 身近な物体の速度を計算することで、平均の考え方を学習させる。	① 語句を使っての作文は難しかった。(ヒントもしくは形式を与えた方が良い。) ② 表現の違いの説明が混乱を招いた。(問6を削除した方が良い。) ③ 時間を徐々に小さくすることを、視覚的にとらえる図がほしい。	① 物体の打ち上げ・落下運動についてよくイメージできていた。 ② 語句の意味・表現の仕方など作文的なことは苦手なようだった。 ③ 平均の速さの計算はよくできていた。 ④ 男子の方が女子より、積極的に発言した。 ⑤ 「今計算しているものは何か」をいつも理解させながら進めないと、単に計算だけをしてしまうことに陥りやすいと感じた。
瞬間の速さ	① 極限の考え方を理解させる。 ② 瞬間の速さの概念を学習させる。	① 極限の計算をあっさりと流してあるので、もう少し練習させたい。 ② 0に近づける説明は、数直線を活用した方が良い。	① 限りなく0に近づくというイメージが分からない生徒がいた。 ② 瞬間の速さの計算は比較的よくできた。 ③ 具体的な事象を例にしてあるので、極限の概念を指導しやすかった。
平均変化率	① 関数では、平均の速さにあたるものを平均変化率ということを理解させる。 ② 平均変化率が2点を結ぶ直線の傾きを意味することを理解させる。	① 平均変化率が2点を結ぶ直線の傾きを意味することを、グラフ上で表した方が良い。	① 平均変化率の計算はよくできた。 ② 平均変化率の意味について、理解できたかどうかの確認はできなかった。 ③ 計算は、女子の方が男子より確実だった。
変化率(微分係数)	① 関数では、瞬間の速さにあたるものを変化率(微分係数)ということを理解させる。	① 問11のグラフ上の意味はよく分からなかったようで、グラフの工夫が必要である。	① 微分係数がその点における接線の傾きを意味するという指導が中途半端になってしまった。 ② 微分係数の計算はだいたいできるようになった。

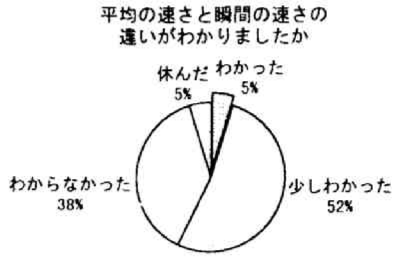






授業後のアンケート
(物理的な事象を扱った案)





6．分析及び考察

アンケート調査の結果を比較すると、物理的な事象を扱った案の方が分かりやすい印象を与えるが、その中身をよく調べてみると、そう単純にはなっていないことに気がつく。

Ａ校（全日制商業科）の場合：

関数中心のワークシート	６枚（６枚中）	対象２年生	170名	必修科目
物理的な事象を扱ったワークシート	６枚（６枚中）	対象３年生	10名	選択科目

Ｂ校（定時制普通科）の場合：

関数中心のワークシート	４枚（６枚中）	対象３年生	13名	必修科目
物理的な事象を扱ったワークシート	３枚（６枚中）	対象３年生	14名	必修科目

以上のように、時間の制約から、授業で行ったワークシートの枚数が違うこと、受講した生徒の数が違うこと、時間のかけかたが違うこと、指導した学年が違うこと、ワークシートの形式が違うこと、などがあり、アンケート調査の結果を単純に比較することはできない。今回の研究目的の一つは、導入の仕方の違いが、生徒の理解に大きな影響を与えるかどうかを調べることであったが、必ずしもどちらがよかったのか判断はつきにくい。しかし、今回の研究において、分かったことがいくつかあるので、それらを以下にあげることにする。

(1)　基礎力確認テストの結果から分かるように、正答率の低い生徒でも授業に興味・関心をもたせる工夫をすれば、アンケート調査では「分かる」「できた」という答えが返ってくる。しかし、応用・発展へと理解が進むかどうかは分からない。

(2)　一般に教師は小中高校のそれまでの学習を生かして、次の段階に進む授業を考えるが、今回対象とした生徒には、それではうまくいかないことが分かった。その都度、生徒に興味・関心をもたせる工夫が教師に求められている。

(3)　教科書を使った講義形式の授業より、ワークシートによる授業の方が、生徒にとっては学習しやすかったようである。

次に、関数中心の案と物理的な事象を扱った案の長所・短所を述べる。

【関数中心の案】

- ワークシートは生徒が自主的に学習できるように工夫されていた。
- 教師の指導助言がわずかですむ。
- 教師数人で受け持つ場合は能率的で進度が合わせやすい。
- 極限の概念をつかむために電卓を使用したが、作業や実習を多くすることは良い。
- 動機付けに難点がある。生徒の興味・関心を引くような身近な題材を取り上げる工夫が必要である。ワークシートにいきなり関数やグラフがでてくることで、数学嫌いを作る原因となる可能性がある。
- グラフにおける接線の指導をする場合、細かいところをグラフに表しにくいので、拡大するなどの工夫が必要である。

【物理的な事象を扱った案】

- 物理的な事象を取り上げることにより、題材を生徒に身近なものに感じさせ、興味・関心をもたせられる。
- 極限の概念がつかみやすい。

・教師数人で受け持つ場合は題材や進度で打ち合わせが必要である。

・今回のワークシートでは教師の指導助言を多くし、じっくり時間をかける必要があった。生徒が自主的に学習できるようにするには、ワークシートのさらなる工夫が必要である。

・物理的な事象から数学への橋渡しが難しい。いかにして整合性をもたせて、生徒に理解させるかが課題である。

どちらの案も、基礎学力がなくても、十分な時間をかけ、教師が創意・工夫することにより、ある程度は、理解を高められることが分かった。

7．まとめと今後の課題

今回の研究では二つのケースを取り上げて指導を試みたが、結果については今後に課題を残した。いずれの案も、それぞれの特徴を生かした授業を工夫していくことが望まれる。

（表）生徒が理解する過程

	導入・基礎	応　　用	発　　展	
	・生徒の興味・関心，理解	・応用力を身につける	・一般化しそれを応用する	
入口	に応じた題材	・公式の意味を理解	・論理を理解する	
	（物理的な事象など）	・思考力を要する例題	・高度の応用力を要する例	
	・簡単な例題	・文字による計算	題	
	・簡単な数値計算	・値の変化を文字で計算	・生徒の学習意欲が必要	出口
入口	・電卓などの活用	・生徒の自主的な学習が	・問題演習が中心	
	・値の変化を数値で計算	大切	・教師の指導助言は最小限	
	・式の意味を理解			
	・教師の指導が重要			
	第一段階	第二段階	第三段階	

A、B校におけるワークシート学習では、表の第一段階および第二段階のはじめで終わっている。それは時間の問題もあるが生徒の学力の問題でもある。本来、数学を理解するとは、数学の一般性を理解させ、論理を知ってもらうことである。これを最終目的とすれば、かなり前の段階で終わっており、物足りなさを感じさせる。しかし、どのあたりまで理解させればよいかは、それぞれの学校の指導目標によって、学校独自で判断することである。今回の研究では、一般性まで理解させることには、いずれの案も難しかったといえる。

しかし、入口から、第一段階までにおいては、生徒の興味・関心、理解の程度に応じて、より身近な題材を選び、指導することが大切であると痛感させられた。さらに、生徒とのコミュニケーションを図りながら、授業に引きつけることも重要な要素である。

教師は「知識を教え込む」授業から、生徒に創意と工夫を感じさせる授業へと転換を図らなければならない。これからは生徒の興味・関心を高め、自主性や意欲を引き出していくことが肝要であると考える。今後の研究課題としては、ワークシートの一層の工夫、教具の開発・改良（例えば、関数のグラフをかいたりする時は、コンピュータなどの利用も考えてよい)、生徒に関心興味をもたせる工夫、などがある。今後も今回の研究で不十分なところを補いながら、授業改善に役立てて行きたいと考えている。

Ⅲ　複素数の演算を幾何学的側面から捉えることにより、数学的な見方や考え方を育てる指導

1．はじめに

学習指導要領の改訂により、数学における科目構成や内容が変わったのに伴って、指導方法の工夫が改めて求められている。特に、今回の改訂で新たに取り入れられた「数学Ｂ」の「複素数平面」の指導に当たっては、これまで「複素数平面」を指導したことのない教員がいることや、複素数が生徒にとって理解しづらい内容の一つであることを考慮する必要がある。

そこで、本研究では、複素数を平面上に表し、その演算を幾何学的に捉えることを通して、生徒が複素数についての性質を理解するとともに、数学的な見方や考え方を養うことができるよう、教材や指導方法を工夫した。

2．研究のねらい

学習指導要領では、複素数平面の学習に関して「ベクトル」との関連性には触れていないが、「ベクトル」を学習した上で複素数平面を学習するという形をとっている教科書もある。しかし、「ベクトル」の知識がなくても複素数の演算を幾何学的に理解することは可能であり、余計な先入観をもたずに学習したほうが、より効果的な学習ができるとも考えられる。

このような観点に立って、本研究を進めるに当たっては次の２点をねらいとした。

(1)　「ベクトル」の知識がなくても複素数平面の学習ができるような、より実践的な教材を開発する。

(2)　複素数平面の導入に当たっては、複素数の幾何学的表現についての理解を徹底させ、特に、加法定理を用いないでも積・商の演算を十分に理解でき、その延長としての「ド・モアブルの定理」を、生徒自ら発見できるよう教材を工夫する。

3．研究内容・方法

上記のねらいに基づき、以下の内容について、指導方法を研究した。

①　複素数平面上における複素数の表し方
②　複素数平面上における加・減法の表し方
③　複素数平面上に表された複素数の乗法における絶対値・偏角の意味
④　乗・除法をよりよく理解するための、極形式の利用
⑤　「ド・モアブルの定理」の幾何学的な表し方

また、次のような方法で、研究を進めた。

①　生徒自らが考え、発見し、理解できるよう、ワークシートを用いて授業を行う。
②　他の先生の協力を得て、教科書による授業との比較を行う。
③　毎時間アンケート調査を行い、生徒の理解度を確認する。

なお、指導に当たっては、数学的な見方や考え方を身につけられるよう様々な工夫をし、ワークシートについても各自の学習内容を記録に残せるようにした。

4．指導計画（7時間分）

2のねらいで述べたように、本研究の主眼は、「ベクトル」や「加法定理」の知識がなくても、複素数のもつ幾何学的側面のよさを強調することにより、「複素数平面」を理解することができるというものである。そのため、指導全体を通してワークシートを活用し、定理の証明等に重点をおくのではなく、作図を通して、複素数の演算に関する図形的な性質に生徒が気付くよう指導することとした。具体的な指導過程は次の通りである。

(1) 複素数は数直線上の点として表せないことに気付かせた上で、複素数が平面上の点として表せることを理解させる。

(2) 実際の計算結果をもとに複素数の和・差が複素数平面上でどのような点として表されるのかに気付かせ、その幾何学的意味を理解させる。

(3) 複素数の累乗を計算することにより、複素数の積が、偏角の和と絶対値の積で決まることに気付かせ、作図によって積が表現できることを理解させる。その際、累乗だけでなく、任意の複素数の積も、偏角の和と絶対値の積により決まることを作図により予想させ、計算によって確認させる。

(4) 商については積の逆演算として考えさせ、その性質に気付かせる。

(5) 積・商が偏角と絶対値で決まることを強調した後で、複素数の極形式を導入し、極形式を用いることの必然性とその良さを理解させ、改めて複素数の積・商の一般化を図る。

(6) 応用として、「ド・モアブルの定理」を取り上げる。その際、実際の累乗の計算を極形式で求めて図示し、「ド・モアブルの定理」に気付かせるようにする。

以上のような考えに基づいて、次のような指導計画を作成した。

◇第1時間目
- 複素数とその演算

◇第2時間目
- 複素数平面の導入
- 共役な複素数
- 複素数の絶対値

◇第3時間目
- 複素数の和・差の図形的な性質

◇第4時間目
- $1+i$ の累乗の計算及び図形的な性質
- 複素数の積の図形的な性質

◇第5時間目
- 複素数の商の図形的な性質
- 極形式の導入

◇第6時間目
- 極形式による複素数の積・商の一般化
- ド・モアブルの定理

◇第7時間目
- まとめと演習

5．学習指導案

本研究では、複素数の計算（特に累乗）を複素数平面上に表すことにより、その図形的な性質を発見すること、極形式を用いることの良さや必然性を理解すること、さらに、「ド・モアブルの定理」も生徒自ら作りだすこと、を目標にした。ここでは、この研究のポイントである4、6時間目の授業について、その学習指導案を示す。

(1)　４時間目の学習指導案

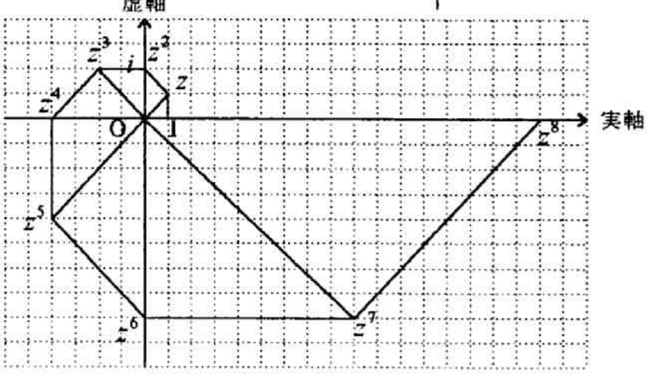
＜本時の目標＞

① $1+i$ の累乗を取り上げ、その計算結果を複素数平面上に図示することにより、$1+i$ の累乗に関する図形的な性質を考えられる。　(関心・意欲・態度)

② ①で発見した性質をもとにして、一般の複素数の積についてその図形的な性質を予想できる。　(数学的な考え方)

③ 異なる二つの複素数の積を計算させ複素数平面上に図示することにより、先に予想した積の図形的な性質が成立することを確認できる。　(表現・処理)

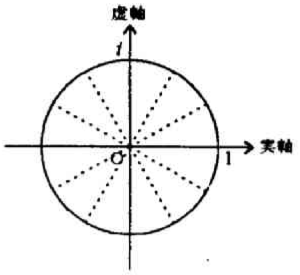
④ 複素数の積が実軸の正の部分となす角度およびその絶対値によって決定することを理解できる。　(知識・理解)

ね　ら　い	学　習　活　動	指導上の留意点及び評価
$1+i$ の４乗までの計算をもとにその図形的な性質を発見させる。 （７分）	$1+i$ の４乗までを計算し、複素数平面上に図示することによりその性質を見つける。	複素数の積を誤り無く計算できるか。 また、複素数を複素数平面上に正しく図示できるか。 (関心・意欲・態度)
発見した性質を確認させる。 （８分）	$1+i$ の８乗までを性質に基づいて図示し、それが計算結果と一致することを確認する。	性質に従って正確に図示できるか。 (表現・処理)
積が、角度の和と絶対値の積により決まることを予想させる。 （１０分）	$z\cdot(1+i)$ が、z の角度，$\|z\|$，$1+i$ の角度，$\|1+z\|$ により決定できることを確認し、一般の場合について予想する。  	$\|\alpha\beta\|=\|\alpha\|\|\beta\|$ ($\alpha\beta$ の角度) ＝ (α の角度) ＋ (β の角度) の関係がきちんと予想できたか。 (数学的な考え方)
異なる二つの複素数（実軸との角度が、30°60°を使う）の積について予想を確認させる。 （１０分）	積を計算により図示し、先の予想が正しいことを確認する。	３つの複素数の角度・絶対値が正しく求められるか。 (表現・処理)
複素数の積に関する図形的な意味を説明し演習を通して理解させる。 （１０分）	積の計算における角度・絶対値の図形的な意味を理解する。 複素数 α , β の積 $\alpha\beta$ の作図 $\|\alpha\beta\|=\|\alpha\|\|\beta\|$ ($\alpha\beta$ の角度) ＝ (α の角度) ＋ (β の角度)	積における角度・絶対値の重要性が認識できたか。 (知識・理解)
本時の内容の確認 （確認テスト） （５分）	積を作図により平面上に図示する	生徒の理解度を把握する。

(2) 6時間目の学習指導案

<本時の目標>

① 極形式で表された複素数の積・商を理解できる。　(知識・理解)
② 極形式で表された複素数の累乗を計算し n 乗を予想できる。　(数学的な考え方)
③ ド・モアブルの定理を理解できる。　(知識・理解)

ねらい	学習活動	指導上の留意点及び評価
極形式による積の計算方法を具体例によって理解させる。 （8分）	複素数の積・商を計算しその結果を極形式で表し、極形式の上でも角度の和・差，絶対値の積・商の関係が成り立つことを確認する。	複素数の積を計算と図形の両面から求められることを覚えているか。 (関心・意欲・態度)
演習を通じて極形式の理解を深めさせる。 （7分）	極形式で表された二つの複素数の積・商を求める。	任意の角度で極形式の積・商が求められたか。
極形式で表された複素数の2乗，3乗から n 乗を予想させる。 （10分）	$z=2(\cos35°+i\sin35°)$ のとき、z^2，z^3 を具体的に計算させ、z^n を類推する。	z^n が正しく予想できるか。 (数学的な考え方)
$z=\cos30°+i\sin30°$ の累乗を極形式で求めさせ、n 乗を予想させる。 （10分）	具体例の2乗3乗‥を求め複素数平面上にその結果を図示しその特徴をつかむ。 問　$z=\cos30°+i\sin30°$ の累乗を求め、複素数平面上に図示しなさい。  $z^2=$ $z^3=$ $z^4=$ $z^5=$ $z^6=$ $z^7=$ $z^8=$ $z^9=$ $z^{10}=$ $z^{11}=$ $z^{12}=$ $z^{13}=$ $z^{1995}=$ n が自然数であれば、 $z^n=\boxed{\qquad}$	$z^{12}=1$ であることを推測できるか。 (数学的な考え方)
ド・モアブルの定理について理解させる。 （10分）	ド・モアブルの定理を理解する。 ド・モアブルの定理 複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき 自然数 n に対して $z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\boxed{\qquad}$ となる。	既知の z^n を生かしてド・モアブルの定理を導いたことが理解できたか。 (知識・理解)
本時の内容の確認 （確認テスト） （5分）	極形式を用いて積・商を求める。	生徒の理解度を把握する。

6. 授業に関するアンケート調査

(1) 調査項目と調査の結果

【質　問】 授業に関心をもてましたか？

① 複素数の和・差を計算ではなく作図で求められることの発見について

② 複素数の積に関する規則性の発見について

③ 複素数の極形式の積について

④ ド・モアブルの定理について

⑤ 1学期に学習した複素数と比較して複素数平面の授業は興味をもてましたか。

上記の質問に対する回答を、それぞれ次の項目から選んでもらった。

Ⅰ ①～⑤の質問に対して

ア 熱心に取り組んだ　イ 普通　ウ つまらなかった

Ⅱ ①，②の質問に対して

ア 発見があった　イ 頑張ったが発見できなかった　ウ あきらめて考えなかった

③，④，⑤の質問に対して

ア なるほどと思ってよく分かった　イ なんとなく分かった　ウ 分からなかった

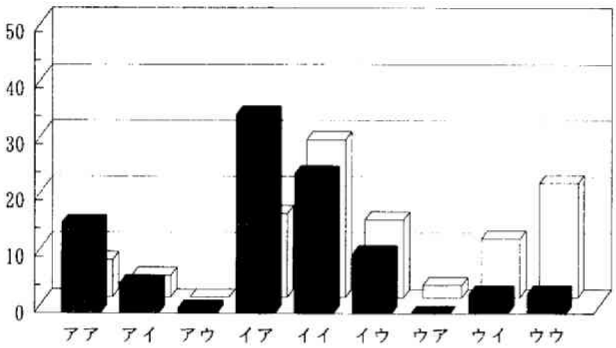
【結　果】

①～⑤の質問に対する、Ⅰ、Ⅱの回答の結果（％）は（表１）の通りである。また、（図１）～（図５）は、①～⑤のそれぞれの結果をグラフ化したものであり、手前の立体がワークシート使用クラス、奥の立体が教科書使用クラスである。

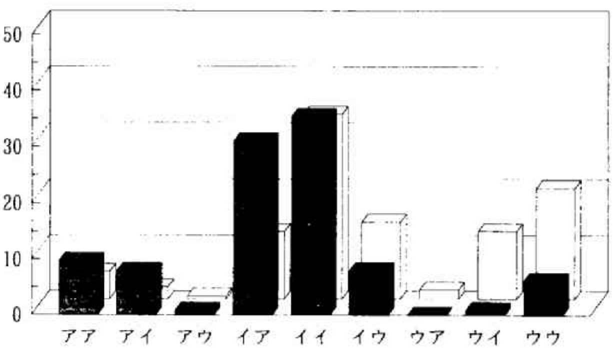
（表１）

質問	クラス	アア	アイ	アウ	イア	イイ	イウ	ウア	ウイ	ウウ
①	ワークシート使用	15.9	5.3	0.9	35.4	24.8	10.6	0.0	3.5	3.5
	教科書使用	6.6	3.8	0.0	14.8	28.0	13.7	2.2	10.4	20.3
②	ワークシート使用	9.7	8.0	0.9	31.0	35.4	8.0	0.0	0.9	6.2
	教科書使用	4.9	2.2	0.5	12.1	33.0	13.7	1.6	12.1	19.8
③	ワークシート使用	12.4	8.8	1.8	14.2	42.5	11.5	0.0	0.9	8.0
	教科書使用	11.0	9.9	0.5	8.2	31.3	11.0	1.1	6.0	20.9
④	ワークシート使用	8.0	3.5	1.8	9.7	45.1	19.5	0.0	2.7	9.7
	教科書使用	9.3	6.6	0.0	5.5	37.4	12.1	1.1	5.5	22.5
⑤	ワークシート使用	10.6	9.7	0.9	11.5	48.7	8.8	0.0	2.7	7.1
	教科書使用	3.8	8.8	1.6	6.0	35.2	9.3	0.5	7.7	26.9

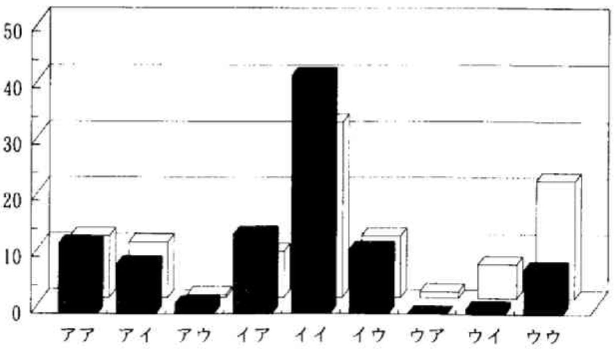
（図１）



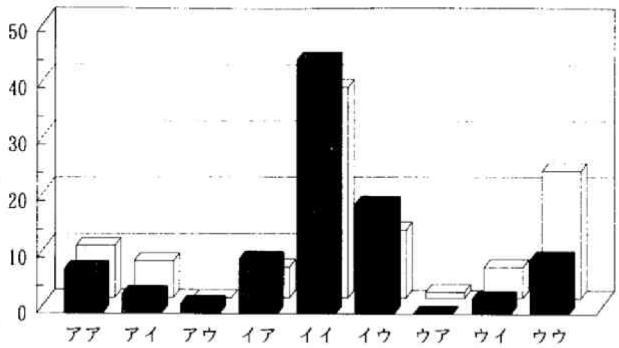
（図２）



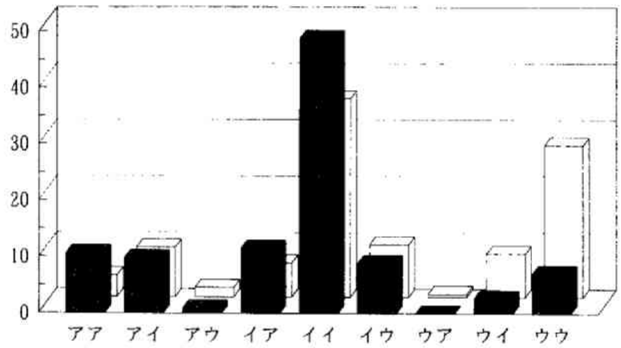
（図３）



（図４）



（図５）



(2) 調査結果の分析

【ワークシート使用クラスと教科書使用クラスとの比較】

２つのクラスに見られる顕著な違いは、ワークシート使用クラスでは２、３時間目の授業に熱心に取り組んだ生徒が多かったことである（図１、２のアア、アイ、アウ）。また、普段と変わらない態度で授業を受けた生徒でも、容易に法則を発見することができた者が多かった（図１～５のイア）。さらに、「授業がつまらなかった」と答えた生徒は、ワークシート使用クラスでは著しく少なかった（図１～５のウア、ウイ、ウウ）。

【ワークシートを使用した授業の分析】

ワークシートを使用することにより、主体的に授業に取り組む姿が多く見られた。特に、作図を利用した数学的な考え方を学ぶ上で、ワークシートは有効であった（図１、２のアア、アイ）。

この他、ワークシートを使用したことによる効果として、次の２点があげられる。第１点は、普段と変わらない授業態度でありながら、結果的に理解が深まったことである。第２点は、授業をあきらめる生徒が極めて少なかったことである。

生徒の声より

- 作図によって簡単に答が出ることの発見は、ひとつの問題に使う時間の短縮にもなって良いと思った。
- 今までは教科書に沿って勉強をしてもよく分からなかったが、プリントでやっていくとけっこう分かるし、教科書でやるよりも楽しく学習できた。
- 数学の授業でプリントを使う形式はめずらしくて良かったと思う。

【調査結果についてのまとめ】

ワークシートを使用することで生徒が作図に専念することができた。また、３時間目の授業における複素数の累乗の作図では大きな発見があったものの、分析結果に現れた混乱は、ワークシートの〈例〉に原因があったものと思われる。この点も考慮しながら、複素数の演算を幾何学的側面から捉えるという数学的な考え方を、生徒自ら発見し学んでいけるよう指導方法をさらに工夫していきたい。

7．複素数平面『授業に関するアンケート調査』における感想

ワークシートを使った授業についての生徒の感想を以下に載せる。

○ワークシートを使った授業は大変良かった。話の内容をすぐ書き込めるし、線を引いたりする時間も省けるし、楽だし、考える時間もあるので授業内で勉強できる。

○プリントを使って授業を進めていくのは分かりやすくて良かった。

○数学が好きなのに頭がついていかないっ！勉強しなくては。

○よく分かって納得いった。だから、簡単に思えた。

○今まで数学の授業を受けてきた中で一番楽しく授業を受けることができました。

○１学期と比べて、とても良くなった。プリントを使うのは正しいと思う。もう少し詳しく書いて欲しいところは和と差の作図で、他はとても良く分かった。これまでのプリントの問題についての解答が欲しかった。

○結構楽しんでできる授業内容だったと思います。教科書よりもプリントで教えてくれた方が、重要な公式とか簡単にまとめてあるし、とても見やすいのでプリントの方が良いと思いました。

○何となく具体的に分かったような気がする。

○今回はプリントでの授業だったためか、自分なりには結構理解できたと思う。これからも、プリントで授業をやってもらった方が理解できるかも知れません。

○最初の方は何となく分かったけどcosやsinがでてきて、分からなくなった。

○難しい。答え方がよく分からない。

○最初のうちは簡単で、楽しく授業できたが、途中難しくなってあきらめてしまった。今度は途中であきらめることなく期末テストに望みたいと思います。

8．まとめと今後の課題

複素数平面で和・差を図形的に捉えながら積へ拡張する場面では、「加法定理」を用いた方法が教科書等で当然のように書かれている。この方法は数学を身に付けている一部の生徒に対しては他分野との関連性において意味をもつが、一方でスローラーナーに代表される数学に苦手意識をもつ多くの生徒にとっては、この方法で学習することは難しい。そこで、今回の研究では、和・差から「ド・モアブルの定理」までを一貫して図形的に捉えることにより、生徒自身が思考し発見しながら、興味をもって「極形式」、「ド・モアブルの定理」までを学習できるようワークシートを活用するなど指導方法を工夫した。

授業実践後のアンケート調査の結果をみると、研究の当初のねらいは概ね達成されたと考えられるが、一方で課題も残された。例えば、複素数平面を利用することの良さである図形への応用を学習内容に含められなかったことや、「ド・モアブルの定理」を利用して様々な二項方程式を解くことが十分できなかったことなどである。

今後、この研究の内容について定着を図るとともに、応用までも含めた「複素数と複素数平面」の内容について、よりよい指導方法を工夫するなど研究を続けていきたいと考えている。