

高等学校

平成 8 年 度

教育研究員研究報告書

数 学

東京都教育委員会

平成 8 年度教育研究員（数学）名簿

班	研 究 テ ー マ	学 校 名	氏 名
I	実験を通して生徒に興味をもたせる確率の指導と教材の工夫－反復試行の確率の理解を目指して－	都 立 城 南 高 等 学 校 都 立 国 際 高 等 学 校 都 立 八 王 子 北 高 等 学 校 都 立 神 代 高 等 学 校 都 立 稲 城 高 等 学 校	上 野 裕 道 石 川 弘 明 石 川 達 也 水 野 祐 子 北 川 芳 子
II	身近な事象を題材とした、指数関数・対数関数の指導－指数から対数へのスムーズな移行を目指して－	都 立 富 士 高 等 学 校 都 立 文 京 高 等 学 校 都 立 足 立 高 等 学 校 都 立 篠 崎 高 等 学 校 都 立 松 が 谷 高 等 学 校	小 澤 時 男 廣 瀬 薫 平 川 光 宣 森 茂 高 橋 直 樹
III	具体的な作業を通して積分と面積の関係を発見させる指導	都 立 第 一 商 業 高 等 学 校 都 立 砧 工 業 高 等 学 校 都 立 墨 田 工 業 高 等 学 校 都 立 砂 川 高 等 学 校 都 立 小 平 高 等 学 校	大 井 康 道 萩 原 聡 横 井 雅 一 下 寺 弘 河 野 明 夫

担当 教育庁指導部高等学校教育指導課指導主事 吉 野 恒 夫

**主題 探求的思考や発見的考察を通して
生徒の数学的イメージを膨らませる
指導方法の工夫**

目 次

I 実験を通して生徒に興味をもたせる確率の指導と教材の工夫

—— 反復試行の確率の理解を目指して ——

1. 研究のねらい	2
2. 研究のないよう・方法	2
3. 教材と指導方法の工夫	2
4. 授業に関するアンケート調査	8
5. 分析と考察	9
6. まとめ	9

II 身近な事象を題材とした、指数関数・対数関数の指導

—— 指数から対数へのスムーズな移行を目指して ——

1. はじめに	10
2. 研究のねらい	10
3. 研究内容・方法	10
4. 指導計画（4 時間分）	12
5. 指導案	13
6. ワークシートの例	14
7. 授業に関するアンケート調査	16
8. まとめと今後の課題	17

III 具体的な作業を通して積分と面積の関係を発見させる指導

1. 研究のねらい	18
2. 研究内容・方法	18
3. 教材・教具の工夫	19
4. 学習指導案	20
5. 授業実践	22
6. 分析と考察	24
7. まとめと今後の課題	24

I 実験を通して、生徒に興味をもたせる確率の指導と教材の工夫

—— 反復試行の確率の理解をめざして ——

1. 研究のねらい

生徒の数学離れが話題となってから久しい。都立高校における科目選択状況をみても、数学を選択する生徒は以前と比べて減少している。このため、高等学校数学科では、数学への興味・関心を高め、数学的な見方や考え方を育てるとともに、それらを活用することのよさを認識させることができるよう、授業実践を通じた、教材や指導方法の研究・工夫が求められている。

このような観点に立ち、第1班では、高等学校で全員履修する科目である「数学Ⅰ」の「確率」について、新たな視点から教材を開発し、指導方法を研究することにした。

確率は、気象情報の「降水確率」などのように日常生活と関連が深く、学習することの意義が分かりやすい単元である。実際、数学を苦手としている生徒でも、確率の授業になると興味をもって取り組む者が多数いる。

本研究では、このような生徒の現状を踏まえ、実験を効果的に取り入れて、確率への興味・関心を高めるとともに、確率の意味を正しく理解することができるよう、教材及び指導方法を工夫した。

2. 研究の内容・方法

高等学校で初めて学ぶ反復試行の確率が計算で求められることを目標に、確率の導入、独立及び反復試行の確率の指導等について、次のような方法により研究を進めた。

- (1) 教科書や文献等を参考とし、生徒が興味・関心を示すような実験教材を工夫する。
- (2) 授業中に実験が効率よくできるように、ワークシートを作成する。
- (3) ワークシートを用いて、研究授業を行う。
- (4) 確率の授業についてのアンケート調査を行い、分析・考察を行う。

3. 教材と指導方法の工夫

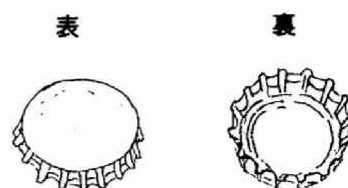
研究のねらいに基づき、次のような2つの実験教材を工夫した。

(1) 王冠投げの実験（確率の導入）

中学校数学とのつながりに配慮して、確率の導入は相対度数の安定性を確かめることから始めることとし、そのための手段として王冠投げの実験を取り上げた。王冠投げの実験は、硬貨投げ、サイコロ投げのように試行の結果が予測できる実験とは異なり、結果の予測ができず、生徒に期待を抱かせることができる。

実験は、1時間の授業内で行えるものとするため、投げる回数を多くしたときに、実験者による相対度数の差が小さくなり一定の値に近づいていくこと（大数の弱法則）を確かめる方法で行った。

実験は各班2人で行い、1人が王冠を投げ、他の1人がワークシートに記入した。



王冠は飲食店から譲ってもらったものの中から、できるだけ曲がっていないものを選んで使用した。また、実験が手際よく行えるよう、各班にワークシート2枚と電卓1台を用意した。ワークシート（No.1）には、表の出た数の累計欄と相対度数の欄を設け、書き込みながら計算できるように工夫した。

「硬貨を投げたとき、表が出る確率は1/2である。では、王冠を投げたとき、表が出る確率はいくらか」という問いかけから授業を導入した。王冠の表裏を確認し、表が出る場合の相対度数の求め方を説明した後、何も置いていない机の上で王冠を投げる実験を行った。

王冠投げは各班500回ずつ行った。ワークシート（No.1）に従って、各班ごとに、王冠を10回、40回、100回、200回、及び500回投げ終わったときの表が出た回数を確認し、相対度数を計算した。また、他の班の状況も把握できるように黒板の一覧表に結果を書き込み、それに基づいてワークシート（No.2）に20班すべての実験結果を折れ線グラフで示した。

実験結果は次ページのとおりで、実験回数が増えるにつれて各班の相対度数が0.4に近づく様子がはっきりと読みとれた（4ページ参照）。この結果から、王冠を投げたときに表が出る確率は概ね0.4と推定されるとして、この時間の授業をしめくくった。

数学Ⅰ・王冠投げの実験プリント NO. 1

月 日 ()

実験者	年 組 番 氏名
	年 組 番 氏名

- ※ 1. 表が出たら○を、裏が出たら×を書き入れなさい。
 2. 10回毎の表の数をアの欄に記入する。
 3. 10回毎の表の数を、次々にたして、イの欄に記入する。
 4. 10回、40回、100回、200回、500回、投げたときの表の数の相対度数を計算する。

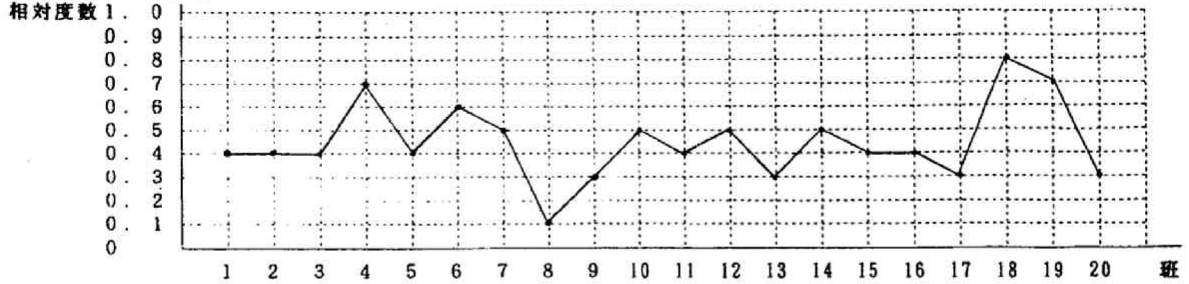
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ア ○の数 (10回毎)	イ ○の数 の累計	表が出る 相対度数	
												イ ÷ 10	10
													20
													30
												イ ÷ 40	40
													50
													60
													70
													80
													90
												イ ÷ 100	100
													110
													120
													130
													140
													150
													160
													170
													180
													190
												イ ÷ 200	200
													210
													220
													490
												イ ÷ 500	500

数学 I - 王冠投げの実験プリント NO. 2

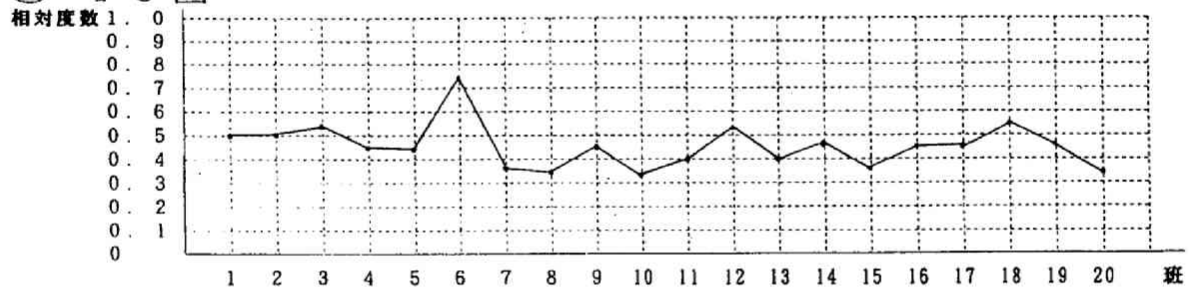
月 日 ()

実験者	年	組	番	氏名
	年	組	番	氏名

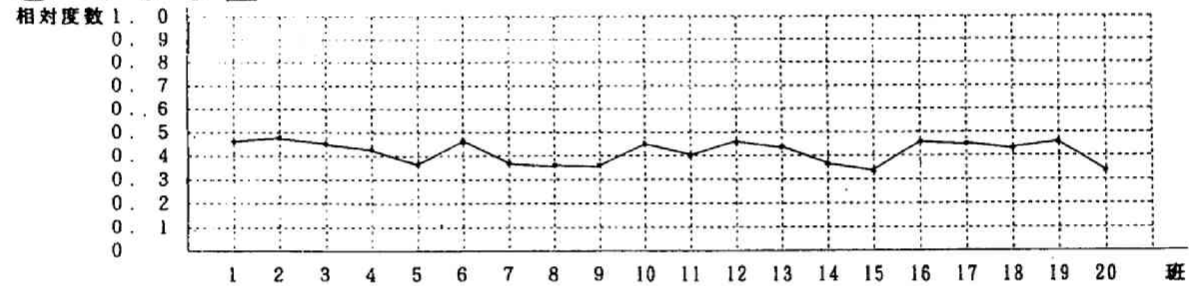
① 10回



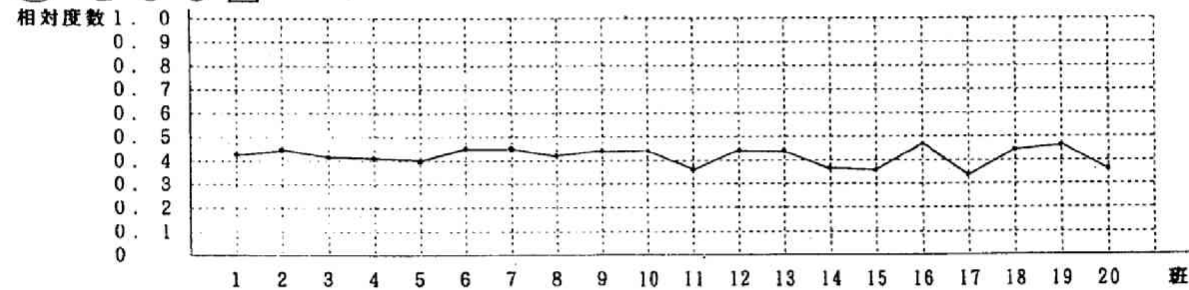
② 40回



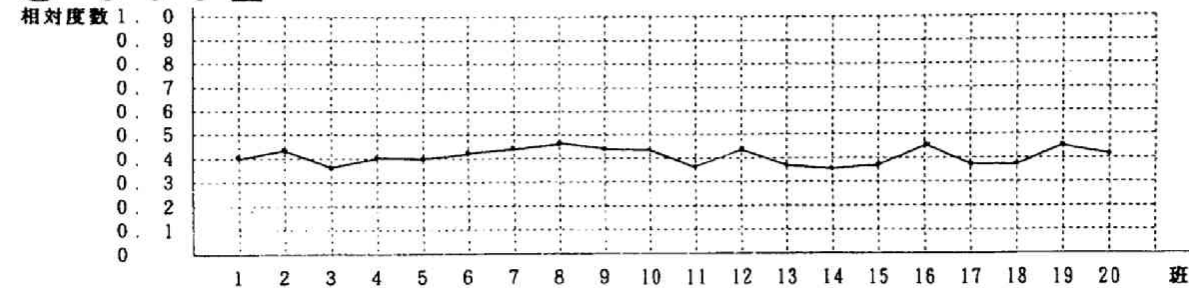
③ 100回



④ 200回



⑤ 500回



(2) アラビア語の三択テスト（反復試行の確率）

高等学校で初めて学ぶ反復試行の確率は、既習事項の、組合せや独立試行の考え方をを用いることから内容が高度になり、生徒が理解しにくいところである。そこで、目新しい実験として、右のようなアラビア語の三択テストを実施することにした。選択肢の中から答を選ぶことは、クイズ番組などでおなじみである。テストの題材としては、生徒が無作為に答を選ぶよう、アラビア語を用いることにした。また、後の計算が簡単で一般化が容易なものとするために、選択肢の数は3、問題数は5とした。このことから、1問正解する確率は $1/3$ 、間違える確率は $2/3$ となる。さらに、それぞれの問題に答えることは独立な試行である。

このテストは、反復試行に入る直前の授業（指導案①）の終了間際に、短時間で実施した。これから何をするのだろうかという期待感をもって、反復試行の学習に入っていけるようにするためである。

反復試行の確率の授業の1時間目は、5問の三択テストで2問正解する確率を求めることを目標に展開した。（指導案②）。

反復試行の確率の授業の2時間目は、1学年全体の採点結果を基に作成した正答数と正答率の表を配布し、各自が計算で求めた確率と対比させた。結果は、実験値が理論値とほぼ一致した。（右表）

次に、アラビア語の三択テストにおいて、5問中1問だけ正解する場合と10問中2問だけ正解する場合とでは、どちらが起こりやすいかについて質問した。ほとんどの生徒が、どちらの場合も同じ程度に起こりやすいと予想したが、それぞれの確率を実際に計算してみて、結果が異なることに驚いていた。その後、練習問題を解かせ、これらを一般化して公式を導いた。（指導案③）

アラビア語単語テスト

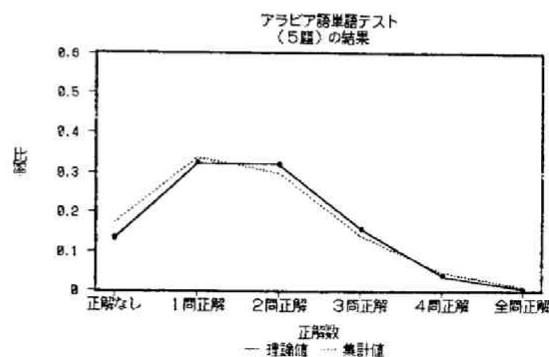
次の日本語の意味を持っているアラビア語は、イ)、ロ)、ハ)、のうちのどれでしょうか。あなたがこれと思うものに○をつけて下さい。

- (1) 朝食 イ) باجاني
 ロ) زرز
 ハ) فطور
- (2) 秋 イ) الخريف
 ロ) الربيع
 ハ) الشتاء
- (3) 南 イ) جنوب
 ロ) غرب
 ハ) شمال
- (4) レモン イ) فلي
 ロ) ليمون
 ハ) عرق
- (5) 数学 イ) فنون
 ロ) موسيقى
 ハ) رياضيات

アラビア語単語テストをして・・・ 正解はハイロハ

★下の表は先日おこなったアラビア語3択単語テスト（全5問）の結果である。空欄を埋めグラフを完成し、計算で求めた確率と比べてみよう。

	人数	比率	小数で表すと	理論値（小数）
正解なし	52	52/303	0.172	0.132
1問正解	102	102/303	0.337	0.329
2問正解	90	90/303	0.297	0.329
3問正解	42	42/303	0.139	0.165
4問正解	14	14/303	0.046	0.041
5問正解	3	3/303	0.009	0.004
合計	303	1	1	1



指導案① 数学Ⅰ 単元：「確率」（独立な試行の確率）

本時の目標：独立な試行の確率を理解する。

	指導内容及び学習活動（教師Tの発問と生徒Sの活動）	☆指導上の留意点、★評価
導入	課題 1個のサイコロを2回投げるとき、1回目は3以上の目が出て、2回目は、2以下の目が出る確率を求めよ。	☆生徒の発表を通して授業を展開する。
展開	S1 すべての場合を書き上げ、全事象の要素の数と、1回目は3以上の目が出て2回目は2以下の目が出る場合の数を数え上げ、定義により確率を求めようとする。 (4×2) / (6×6) S2 3以上の目が出る確率、2以下の目が出る確率をかけて、確率を求めようとする。(4/6) × (2/6)	★事象を表などで書き表し、要素の個数を求めようとする。 (関心・意欲) (表現・処理) ★定義から確率を求めることができる。 (知識・理解) ★これまでに解いた問題から類推しようとする。 (数学的な考え方)
まとめ	T それぞれの結果の起こり方が互いに影響を与えない2つの試行U、Vは独立であるという。このとき、試行Uで事象Aが起こり、試行Vで事象Bが起こる確率は、 $P(A) \cdot P(B)$ である。 <練習問題を通して理解を深める>	★独立な試行の確率が理解できる。 (知識・理解)
	アラビア語の三択テストを実施。(次時の準備)	☆興味・関心を引く教材を用意する。

指導案② 数学Ⅰ 単元：「確率」（反復試行の確率、第1時間目）

本時の目標：既習の組合せや独立な試行の考え方を生かして、反復試行の確率を求めることができる。

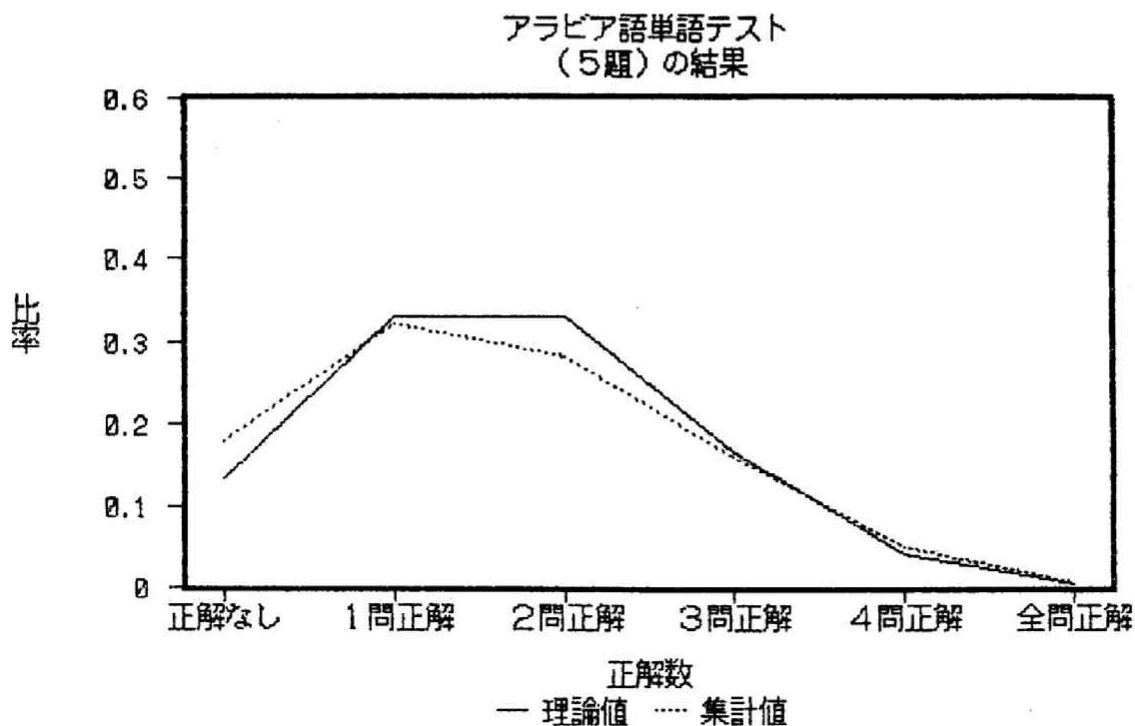
	指導内容及び学習活動（教師Tの発問と生徒Sの活動）	☆指導上の留意点、★評価
導入	課題 5問のアラビア語の三択テストででたらめに答を選んだとき、次の確率を求めよ。 (1) 5問とも正解する (2) 5問とも間違える (3) 5問中2問正解する	★課題に積極的に取り組もうとする。 (関心・意欲) ☆生徒の発表、質疑応答を通して課題を解決していく。
展開	T 1問の三択テストででたらめに答を選んだとき正解する確率を求めよ。 S $1/3$ T 5問とも正解する確率を求めよ。 ($1/3$) ⁵ = $1/243 \approx 0.004$ T 1問の三択テストででたらめに答を選んだとき間違える確率を求めよ。 S $1 - (1/3) = 2/3$ T 5問とも間違える確率を求めよ。 S ($2/3$) ⁵ = $32/243 \approx 0.132$ T 初めの2問続けて正解し、残り3問は間違える確率を求めよ。 S ($1/3$) ² ($2/3$) ³ = $8/243 \approx 0.033$ T 5問中2問正解するのはどのような場合があるか、すべて書き出してみよう。 S A_1 : ○○××× A_6 : ×○×○× A_2 : ○×○×× A_7 : ×○××○ A_3 : ○××○× A_8 : ××○○× A_4 : ○×××○ A_9 : ××○×○ A_5 : ×○○×× A_{10} : ×××○○ T すべて書き出さずに何通りか分かる方法はないか。 S ${}_5C_2$	☆課題が正しく把握できたか留意する。 ★独立な試行であることに注意し、(1)の確率が求められる。(知識・理解) ★余事象の確率が求められ、独立試行であることに注意して(2)の確率が求められる。(知識・理解) (表現・処理) ★内容を明確にし、簡潔に表現しようとする。 (数学的な考え方、表現) ☆5問中2問正解する仕方は ${}_5C_2$ 通りあることに気付かせる。
まとめ	T $A_1 \sim A_{10}$ は同時に起こることはない。 $A_1 \sim A_{10}$ の確率を求めることにより、5問中2問正解する確率を求めよ。 S ${}_5C_2 (1/3)^2 (2/3)^3 = 80/243 \approx 0.329$	★ $A_1 \sim A_{10}$ は排反であること、それぞれの確率の値は等しいことを理解し、(3)の確率が求められる。 (知識・理解) (表現・処理)

指導案③ 数学Ⅰ 単元：確率（反復な試行の確率 第2時間目）

本時の目標：複数の具体例を通して反復試行の確率の公式を導き、理解を深める。

	指導内容及び学習活動（教師Tの発問と生徒Sの活動）	☆指導上の留意点、★評価
導入	（前時の続き） 5問の三択テストででたらめに答を選んだとき、次の確率を求めよ。 (1) 正解なし (2) 1問正解 (3) 2問正解 (4) 3問正解 (5) 4問正解 (6) 全問正解 採点したアラビア語の三択テストを返す。 1年全クラス分の正答率と計算の結果とを比べる。 （P.4参照）	☆生徒との質疑応答を通して前時を復習しながら解決していく。 ★理論値と実験値がほぼ一致することが理解できる。（知識・理解）
展開	課題 三択テストででたらめに答えを選んだとき、5問中1問正解するのと10問中2問正解するのではどちらが起こりやすいか。 T 予想を立ててから計算してみよう。 S ${}_5C_1(1/3)(2/3)^4=2160/6561$ $> {}_{10}C_2(1/3)^2(2/3)^8=1280/6561$ 練習問題 (1) 王冠を5回投げたとき、2回表向きになる確率を求めよ。 (2) サイコロを4回投げたとき、2回だけ1の目が出る確率を求めよ。	★問題数を増やしたらどうなるか考えることができる。（数学的な考え方） ☆予想を立てることと、結果がどうなるかということについて考察させる。 ★王冠を投げたとき、表向きになる確率が0.4であることを活用し、練習問題の確率を求めることができる。（知識・理解）（表現・処理）
まとめ	T 公式を作ろう S 1回の試行で事象Aの起こる確率を p とする。 この試行を n 回繰り返すとき、事象Aが r 回起こる確率は ${}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$	★課題、練習問題の類似に気付き、一般化して簡潔に表現しようとする。（数学的な考え方）

以下は、3校643人にアラビア語の三択テストを実施した結果である。



4. 授業に関するアンケート調査

実験を取り入れた今回の確率の授業について、生徒がどれだけ興味をもって取り組むことができたかを、授業実践を行ったクラスでアンケート調査した（94名）。その結果は以下のとおりである。

(1) 王冠投げの実験について

	はい	いいえ	どちらでもない
興味をもって実験に取り組んだか	45人	20人	29人
実験の記録用紙は使いやすかったか	41	13	40
実験結果のグラフは見やすかったか	52	14	28
相対度数が一定の値に近づくことを実感できたか	72	8	14

(2) アラビア語の三択テストについて

	はい	いいえ	どちらでもない
興味をもってテストに取り組んだか	43人	28人	23人
5問中2問正解する確率の求め方を理解できたか	64	12	18
反復試行の確率を理解できたか	45	17	32

(3) 確率の授業について

	はい	いいえ	どちらでもない
実験を取り入れた確率の授業に興味をもてたか	49人	13人	32人

(4) 確率の授業を終えての生徒の感想

- たくさんの班で行うと本当に一定の値に近づいて、とても驚いた。
- 話を聞いたりノートに書くだけではなく、授業に変化があってよかった。
- 王冠投げは疲れたけれど、実験を取り入れると理解しやすい。
- 実験をすることにより、確率の計算結果が実感できてよかった。
- 授業内容は理解できたが、実験を行うのは時間の無駄に思えた。
- 実験で結果が出た後少し確率が分かった気がしたけれど、問題を解こうとするとまた分からなくなった。
- 普段の何気ない生活の中にも、確率を応用できる事柄があることが分かった。
- 確率は日常生活でも使える数学だと思った。
- 計算が複雑な訳ではないけれど確率は難しい。

以上のアンケート調査の結果から、実験を取り入れた授業は概ね好評であったと考えられる。一方で、単調な王冠投げの実験に飽きたとか、実験は必要ないのではないかといった率直な意見や、実験を介してもなお確率の難しさは残ったという感想もあり、確率の指導の在り方を考える上での参考となった。

5. 分析と考察

- (1) 王冠投げの実験はA校1クラスを含む3校5クラスで実施した（A校での実験結果を4ページで紹介）。答のない実験で不安はあったが、実験回数が増えるにしたがって、各班の相対度数の差が小さくなった。また、20の班の相対度数を折れ線グラフで示したことにより、生徒一人一人が各班の状態を視覚的にとらえることができた。この点は、アンケート調査の結果からも同われ、王冠を用いた実験が、相対度数の安定性を確かめるのに効果的であることが分かった。

ワークシートの構成を、1時間の授業でグラフの作成まで終わらせるよう工夫したため、実験前の口頭による注意、説明は最小限の時間で済ませることができた。一方、毎回の試行結果をシートに書き込めば手計算でまとめられるところを、その手順を踏まずに500回続けて王冠を投げてしまい、累計欄を使用しない班があった。累計欄は作業の効率化を図ると共に集計上の誤りを減らす目的もあった。また、点検するときには、相対度数が標準的な値からかい離している箇所に注意すればよく、ここでもワークシートは有用であった。

なお、実験前に、表がでる確率は $1/2$ であると予想した生徒が、どの学校でも3割程いたことは興味深いことである。

- (2) アラビア語の三択テストは問題のプリントを1枚用意しさえすれば5分程でできるので、他のクラスの数学担当者の協力も得やすく、十分な標本数を容易に確保することができる。

反復試行の実験を授業で行うのは初めてであり、採点をしながら予想通りの結果がでるかどうかが不安であったが、実験値と理論値がほぼ一致し、当然の結果とはいえ安堵した。

反復試行の確率は、生徒がつまずきがちなところである。アラビア語の三択テストを実施したとき、「どうせ確率の問題でしょ」という声もあったが、生徒の関心を引きつけることができたという手応えがあった。その後の学習に主体的に取り組むきっかけを与えることができたのではないかと思う。ただ、アラビア語の三択テストの実験結果に対する生徒の反応は、教師が期待したほどではなかった。小数点以下の数字の違いが目についたことが原因であったようである。王冠投げの実験の時のように、直接グラフに書き込ませた方がよかったのかもしれない。

それに比べ、10問中2問正解する場合の方が5問中1問正解する場合より確率が低くなることは、生徒にとって大変印象的であったようである。このことは、問題数が増えるかどうかということについて、発展的に考える契機にもなったのではないかと思われる。

6. まとめ

数式が思考の手助けとなる解析や代数と異なり、高等学校での順列組合せや確率の学習は、計算に取り掛かる前に論理的な思考を要求されるため、多くの生徒が難しいと感じる単元である。本研究では、確率の授業を進めるに当たり、生徒の興味・関心を引きつけ、理解を助けることを意図して実験を取り入れた。もとより、数学の一分野である確率は実験科学ではなく、実験で検証すればよいというものではない。また、実験そのものは息抜きのように楽しいが、何を目的として実験を行っているのか分からないようでは、その意義は無に帰してしまう。これらのことを踏まえた上で、本研究の目標はほぼ達せられたと思われる。

Ⅱ 身近な事象を題材とした、指数関数・対数関数の指導

—— 指数から対数へのスムーズな移行を目指して ——

1. はじめに

科学技術の発展や情報化の進展など社会状況が大きく変化する中で、様々な分野において、数学的な思考の重要性が再認識されている。このため、数学教育においては、論理的な思考力や直感力を育成し、事象を数学的に考察し処理する能力や態度を育てることが求められており、各高等学校では、生徒の実態に応じて、教材や指導内容・方法の工夫を図ることが必要となっている。

このような観点に立って、本研究では「数学Ⅱ」の「指数関数・対数関数」を学習するに当たり、自然現象や社会現象に見られる指数的・対数的な事象を題材として取り上げ、指数関数から対数関数への移行がスムーズに行われるよう、教材や指導方法を工夫した。

2. 研究のねらい

指数については様々な具体的事例があり、導入に際してその概念はほとんど問題なく受け入れられているが、対数については、多くの教科書が指数の逆演算により定義し、導入としているため、具体的なイメージを想起することが難しい状況がある。

学習指導要領によると、逆関数は「数学Ⅲ」において取り扱われることになっており、「数学Ⅱ」の対数関数の学習においても指数関数の逆関数としてではなく、単なる式変形として、 $y = \log_a x$ は $x = a^y$ であるとしている。そこで、本研究においては、生徒が対数の学習に意欲的に取り組み、自ら対数の必要性や法則を発見するような授業を展開するために、具体的でわかりやすい事例を題材として使用することにした。実際の授業ではワークシートを活用し、生徒一人一人が自らの発想を生かすとともに、教師とのコミュニケーションを通して、内容についての理解を深めることができるよう指導方法を工夫した。

研究を進めるに当たっては、次の点をねらいとした。

- (1) 具体的事例を用いて、指数的な対応に対して対数的な対応を発見させる。
- (2) 具体的モデルを利用して、 $\log x$ の導入と底の必要性を理解させる。
- (3) 導入で用いたモデルをそのまま利用して、対数の性質も導けることを理解させる。

3. 研究の内容・方法

対数の導入では、対数を指数の逆演算として定義し、具体的事例を用いての説明をしないまま、式変形や計算の練習にのみ陥りがちである。そのため、対数的に変化する事例が身近に多くあるにもかかわらず、対数本来の意味や必要性を理解できないまま通り過ぎてしまう場合が多く見受けられる。

そこで、対数の意味や必要性を自ら発見し理解するとともに、数学的な見方や考え方を培うことのできる教材を以下に3通りあげることにする。

(1) 指数と対数の関係を説明するための具体的事例

事 例	内 容	指 数 関 数	対 数 関 数
巻き貝の曲線 (オウム貝等)	巻き貝の曲線が1回転するごとの中心からの成長曲線の距離	x 回転したときの中心からの距離を y とすると $y = 3^x$	中心からの距離が x のとき回転数を y とすると $y = \log_3 x$
新聞紙の厚さ	厚さ 1 mm の新聞紙を次々と折り曲げたときの紙の厚さ	x 回折り曲げたときの新聞紙の厚さを y mm とすると $y = 2^x$	厚さ x mm のときに折り曲げた回数を y とすると $y = \log_2 x$
細菌の増殖	1 時間毎に増殖する細菌の量	x 時間後の細菌の量を y とすると $y = a^x$	量が x になるまでの時間を y とすると $y = \log_a x$

この他にも様々な事例が考えられるが、今回の研究では、以下の理由から「細菌の増殖」を使って指導を行うことにした。

- ① 指数関数との関連から連続的に変化するものが望ましく、指数として分数や負の数を利用することができる。
- ② 増殖率の定義の仕方により、底が自由に変えられるため、底の必要性を認識させることができる。

(2) 指導法の研究

次のようなねらいに基づきワークシートを作成した。

- ① 対応表を自ら作成することにより、時間と量の関係をイメージさせる。
- ② 「細菌の増殖」という具体的な事例を用いて、時間から量への指数的な対応に対して、逆に、量から時間への対数的な対応を発見させる。
- ③ 指数的に変化する細菌の増殖の時間と量を逆に考えることにより、対数の必要性を実感させ、対数記号 $\log$ を導入する。
- ④ 細菌の増殖率がわかりやすい 10 倍モデルや 2 倍モデルを合わせて利用し、底の必要性を発見させる。
- ⑤ 対数の導入で用いた対応表から対数の性質を発見させる。

また、指導にあたっては以下の点に配慮した。

- ア 細菌の増殖が時間とともに連続的に増え続けるものであることを実感させる。
- イ 対応表を作成する際、30 分後や 1 時間前を考えさせることにより、指数の分数や負の数の存在を実感させる。
- ウ 底を意識せずに対数記号 $\log$ を導入するために、底を省略した常用対数が利用できる、1 時間に 10 倍に増殖する細菌の例を考える。

4. 指導計画（4 時間分）

本研究では、生徒が対数概念の重要性に気付き、自ら考え、結論を導くことを第一とした。そのため、指導全体を通してワークシートを活用し、原則として1時間に1枚のワークシートを使用した。対数関数は、学習指導要領によると「指数関数の逆関数としての取り扱いが行わない」となっている。その点を考慮して指導計画を立て、対数記号の導入には対応表を用いた指導に重点をおいた。このことは、その後の対数関数のグラフ指導にも非常に役立った。また、対数は、底の省略できる常用対数を最初に取り扱った。

具体的な指導過程は次の通りである。

- (1) 1時間たつと10倍に増殖する細菌モデルを導入に利用する。
(底が10になるモデルを設定する)
- (2) 時間から細菌の量を求める対応表を完成させる。その際に指数の復習を行う。次に、細菌の量から時間を求める対応表を完成させることを通して対数記号の必要性を生徒自身に気付かせ、対数を定義する。
- (3) 第1時間目から対応表を用いて対数の値を求めさせる。
- (4) 1時間で2倍に増殖する細菌モデルを導入して、最初の対数の定義では矛盾が生じることを理解させる。
(底が2になるモデルを設定する)
- (5) 底を含んだ新しい対数の定義を行う。
- (6) 指数と対数の関係を生徒に理解させ、練習問題を解かせる。
- (7) 対応表を利用して、対数の性質を導く。
- (8) 対数の性質を用いて、対数計算を行う。

指導計画（4 時間分）

- ◇ 第1時間目
 - ・10倍モデルの細菌を利用した指数の復習と対数の導入
- ◇ 第2時間目
 - ・2倍モデルの細菌を利用した底の導入
- ◇ 第3時間目
 - ・対数の性質について
- ◇ 第4時間目
 - ・対数の性質のまとめ
 - ・対数計算の練習

5. 指導案

実施科目：数学Ⅱ 単元：「指数関数・対数関数」（対数関数 1 時間目）

本時の目標

- ① 与えられた課題に対して興味をもち、既習事項をもとに課題解決への予想を立てるなど、意欲的に取り組もうとする。
- ② 数量の関係を調べ、類推した事をもとにその規則性を発見することができる。
- ③ 表作成の過程で見つけた規則性を定式化するとともに、常用対数を導入する。
- ④ 常用対数を理解し、簡単な値を求めることができる。

時 間	指 導 内 容	学 習 活 動	評価の観点及び指導上の留意点										
導 入 5分	細菌の増え方の話 病原性大腸菌O157の増え方についての話をする。	配布したワークシートの細菌の写真 をみる。	細菌の話に興味を示したか。 (興味・関心)										
展 示	1時間から量が10倍に増え続ける細菌のモデルを提示する。 時間から細菌の量を求めさせる。 p時間後に細菌の量が10^pになることを気付かせる。 30分後の細菌の量を求めさせる。 細菌の量から時間を求めさせる。	時間から量を求める対応表を完成する。 <table border="1"> <tr> <td>時間(h)</td><td>0 1 2 . . . p</td></tr> <tr> <td>量(mg)</td><td>1 10</td></tr> <tr> <td></td><td>10^p</td></tr> </table> 時刻0, 1時間前, 2時間前, . . . n時間前の細菌の量を求める。 30分後の細菌の量を求める。 量から時間を求める対応表に数字を 記入する。 <table border="1"> <tr> <td>量(mg)</td><td>1 10 100 . . . q</td></tr> <tr> <td>時間(h)</td><td>0 1</td></tr> </table> 細菌の量がq mgになる時間を考える。	時間(h)	0 1 2 . . . p	量(mg)	1 10		10 ^p	量(mg)	1 10 100 . . . q	時間(h)	0 1	時間から量が求められるか。 (表現・処理) 規則を発見することができるか。 (数学的な考え方) 規則を式として表現できるか。 (表現・処理) 1/2 乗が利用できるか。 (理解) 時間と量が逆でも対応表ができるか。 (表現・処理)
時間(h)	0 1 2 . . . p												
量(mg)	1 10												
	10 ^p												
量(mg)	1 10 100 . . . q												
時間(h)	0 1												
開 演 40分	細菌の量がq mgになる時間を 考えさせる。 新記号 logを導入する。 log(量)=(時間)と定義する。 対応表を基に log(量)を求め させる。	細菌の量がq mgになる時間を考える。 定義に従って, 対応表の時間を log(量)で完成する。 log(量)=(時間)の定義から次の値を 求める。 log1, log10, log100	新記号の必要性を理解させる。 (数学的な考え方) 対数の底についてはふれない。 (注意) log(量)=(時間)が分かったか。 (理解)										
結 論 5分	確認問題を解かせる。	log(量)の値を求める。 log1000, log10000 log1/10, log1/100 log()=-3を求める。	生徒の理解度を把握する。 (理解)										

6. ワークシートの例

(1) 第1時間目「指数関数から対数関数へ」

次々、逆に細菌の量から時間を考えてみると、

表2

量 (mg)	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	8
時間 (h)	-2	-1	0	1	2	3	(※)
	$\log \frac{1}{100}$	$\log \frac{1}{10}$	$\log 1$	$\log 10$	$\log 100$	$\log 1000$	$\log 8$

記号: 対数

(※) 細菌の量が 8mg K なる時間は、
 $\log 8$ とする。
 この「ルール」に従うと $\log$ 量 = 時間

例2 からわかること、
 $\log 1 = 0$ (1mg K なる時間)
 $\log 10 = 1$ (10mg K なる時間)
 $\log 100 = 2$ (100mg K なる時間)

[問3] 上記「ルール」に従って次の値を求めよ。

- (1) $\log 10000 = 4$
- (2) $\log 100000 = 5$
- (3) $\log \frac{1}{10} = -1$
- (4) $\log \frac{1}{100} = -2$

[問4] 次の()内に適切な数値を入れよ。

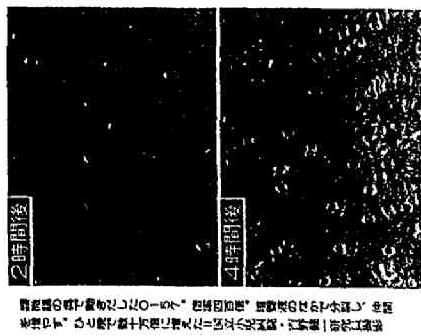
- (1) $\log(\frac{1}{1000}) = -3$
- (2) $\log(\frac{1}{100000}) = -5$

2年()組()番()

指数関数から対数関数へ。
 細菌の増え方は、一定の時間がたつと一定の倍率でいえる規則「 K 」なる
 いるもの成べくさんあいます。

(参考) 1996年(平成8年)8月25日(日)
 朝日新聞

病原性大腸菌 O157 の増え方



今、2時間増え方が10倍増え続ける細菌を考えます。
 (根拠K、このモデルを「10倍モデル」と呼びます。)

[問1] 時刻0 K おける細菌の量を 1mg とし、次の表を完成せよ。

表3... 2... 1時間前 時刻0 1時間後

時間 (h)	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
量 (mg)	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

[問2] 30分後の細菌の量は、何mg ですか。

30分 = $\frac{1}{2}$ 時間 $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3.16$

A. $\sqrt{10}$ mg

(2) 第2時間目「底の導入」と第3時間目「対数の性質」

1時間で量が2倍に増え続ける細菌を今回は考えます。(2倍モデル)

時刻0における細菌の数を1mgとして、下の表を完成せよ。

(表3) 1時間前 時刻0 1時間後

時間 (h)	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	p
量 (mg)				1	2					

逆に細菌の量(重)から時間を考える。

(表4)

量 (mg)				1	2					...	g
時間 (h)				0	1	2					(g)

(※) 細菌の量がg mg になる時間は、

〈前回 決められたルール〉に従う。

- ①お 1時間後は、 $1 =$
 ②お 2時間後は、 $2 =$
 ③お 1時間後は、 $1 =$
 ④お 2時間後は、 $2 =$

この矛盾を解消するため、〈ルール〉を変更する必要があります。

〈改定ルール〉
 細菌の量がg mg になる時間を、
 ①倍モデルでは、 $\log_{10} g$
 ②倍モデルでは、

(表4)お

量 (mg)		1	2	4	8	16	32
時間 (h)		0	1	2	3	4	5

時間の関係から、

$$\begin{aligned} 1+2=3 &\rightarrow \log_2 2 + \log_2 4 = \\ 2+3=5 &\rightarrow \\ 2+4=6 &\rightarrow \end{aligned}$$

一般に $\log_2 M + \log_2 N = \dots \dots \textcircled{1}$

[問題9] ①において $N=M$ の関係を考えよ。

[問題10] $\log_2 M + \log_2 M + \log_2 M$ はどうなるか。

$$\log_2 M + \log_2 M + \log_2 M =$$

①のとき

$$\log_2 M + \log_2 M + \log_2 M =$$

問題9~10を一般に

$$\log_2 M^r = \dots \dots \textcircled{2}$$

時間の関係から

$$\begin{aligned} 3-1=2 &\rightarrow \\ 5-2=3 &\rightarrow \end{aligned}$$

一般に

$$\log_2 M - \log_2 N = \dots \dots \textcircled{3}$$

7. 授業に関するアンケート調査

(1) アンケートの形式

【対数の授業に関するアンケート】

A：下記の①～④の各項目について、興味をもって意欲的に取り組みましたか。

ア 意欲的に取り組んだ イ 普通 ウ あまり興味がもてなかった

B：下記の①～④の各項目について、どの程度理解できましたか。

ア よく理解できた イ 普通 ウ あまり理解できなかった

① 対数記号logについて

② 指数と対数の関係について

③ 対数記号logの性質について

④ 対数記号logの計算について

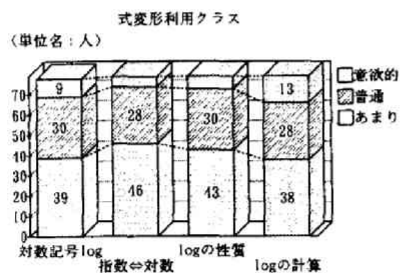
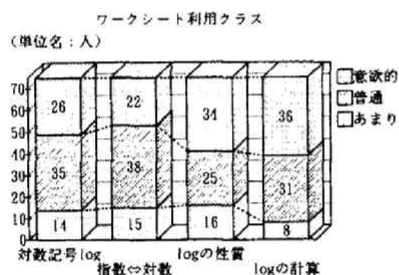
($\log M + \log N = \log MN$ など)

C：対数の授業についての感想を自由に書いて下さい。

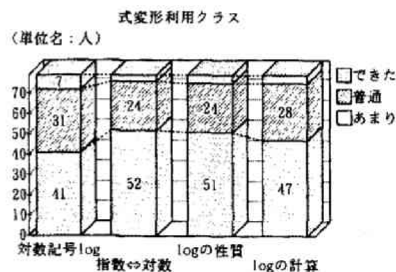
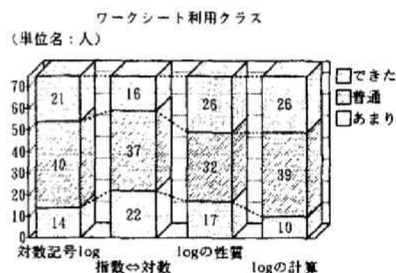
(2) アンケート調査の結果

アンケート調査は、都立A校・全日制普通科2学年で実施し、ワークシート利用の授業を行った2クラスと、従来通り、式変形利用の授業を行った2クラスとを比較した。

《授業に対する意欲度について》



《授業に対する理解度について》



【対数の授業に対する感想】

(ワークシートを利用したクラス)

- ・対数の性質が分かると問題が楽なので、授業が受けやすかった。
- ・プリントは、教科書よりも理解しやすい。
- ・対数と指数の関係がまぎらわしかった。

- $\log$ の計算はおもしろいと思った。
- 感覚的な数学という感じがして、頭で考えるのが結構楽しい授業だ。

(式変形を利用したクラス)

- 難しいと思った。 $\log$ って何ですか。 $\log$ はややこしい。 $\log$ の意味が分からない。
- 対数と指数の関係がよく分からない。
- 何で $\log$ という記号がつき対数となるのか、根本的なことが分からなかった。

(3) アンケート調査の結果の分析と考察

ワークシートを利用した対応表による対数の導入は、「 $y = \log_a x$ は $x = a^y$ 」という式変形による導入に比べ、意欲度・理解度ともに高かったことが分かる。授業に対する意欲度については、授業中の様子からも良い感触は得ていたが、アンケート調査の結果にもそれが現れている。また、授業に対する理解度については、「よく理解できた」と答えた人の数が予想より多く、「あまり興味がもてなかった」と答えた人の数が思ったより少なかった。これは多くの生徒が細菌の増殖という具体的な例を使った対応表に興味をもって取り組み、作業を行いながらの学習を通して対数を自然に理解することができたということであり、今回の研究の目的がある程度達成されたと考えられる。

8. まとめと今後の課題

今回の研究の目的は、これまで拒絶反応を示す生徒が多かった対数の学習について、生徒が意欲的に取り組み、自ら対数の必要性や法則を発見できるような授業を工夫することであった。そこで、今回の研究では授業にワークシートを活用することとし、長時間検討を加えた。その結果、具体例として細菌の増殖を取り上げ、時間と量の関係を示す対応表を生徒自身が完成させていく中で対数の必要性を発見し、対応表を見ながら対数の性質を考えられるようなワークシートを作成した。

ワークシートを使用した授業では、最初に指数の対応表を作り、それを見ながら量から時間を求める対数の対応表を作らせたため、生徒はスムーズに対数の対応表を作成することができた。量から時間を求める対応表から対数の必要性も無理なく理解でき、記号 $\log$ に対する拒絶反応を示す生徒は少なかった。10倍と2倍の2つのモデルを学習することによって、底の意味も理解でき、式変形から導入する方法よりは取り組みやすく、興味・関心も高かった。対数の性質も単に式で示すのではなく、対応表を見ながら考えることにより、「真数の積が対数の和になる」ことなどが視覚的にとらえることができ、理解しやすかったと考えられる。実際の計算は多少苦労したが、投げ出す生徒は少なく、対応表を見ながら頑張る生徒も多く見られた。底の変換公式については、今回対応表を使って示すことができなかったが、底の変換公式は対数の計算には必要であり、今後、より理解しやすい指導方法について研究を進める必要がある。

今回の研究を通して、数学的な見方や考え方を身に付けさせるためには、教師が形式的に公式を教えるのではなく、生徒がその必要性や有用性を自ら発見し考えることが重要であることを痛感した。まだ多くの課題が残されているが、今回の研究の成果を生かし、一人でも多くの生徒が数学に興味・関心をもって取り組むことができるよう、今後とも、教材や指導方法の研究を推進していきたいと考えている。

Ⅲ 具体的な作業を通して積分と面積の関係を発見させる指導

1. 研究のねらい

数学Ⅱの内容である「関数の値の変化」で微分に引き続いて学習する積分について、学習指導要領の解説では、「積分の考え方の指導は、既に学習した導関数の理解を深めることを中心とする」とし、微分の逆演算としての不定積分を導くとともに、定積分については、具体的なイメージを与えるため、面積を求める例などに関連付けて導入することとしている。

教科書の記述を見ると、先に定積分の計算を練習してから面積へ入る場合と、面積の説明を通じてある程度定積分の意味付けを行ってから定積分の計算練習に入る場合があり、いずれの場合も積分によって面積が求められることは説明されている。しかし、この説明だけでは内容を具体的にイメージすることは難しく、生徒は積分と面積との関係を理解しないまま、形式的な計算に終始する傾向が強い。このようなことが生じる要因としては、「微分の逆演算」として導入した積分の姿が見えにくいという状況があげられる。

そこで、本研究では、微分の逆演算として不定積分を導入した後で、面積が積分により求められることを、面積を表すグラフの作成を通して理解させることをねらいとし、教材および指導方法の工夫を行った。

2. 研究内容・方法

関数 $y=f(x)$ ($f(x) \geq 0$) のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$ 、 $x=b$ で囲まれる部分の面積について、 b を変化させることによる面積の変化の様子を作業を通してイメージさせ、不定積分とのかかわりを発見させること、すなわち、微分の逆演算によって面積を求める過程を理解させるために、以下の内容について研究した。

- (1) 生徒に行わせる作業用教材の開発と指導方法
- (2) 黒板での一斉提示のための教具の工夫と指導方法
- (3) パソコンによる一斉提示のためのアプリケーションソフトの利用

これらの研究を行うに当たっては、生徒が目で見分ける、自分の手で作業し、体感し、自ら発見するという過程を重視している。そこで、面積の変化の様子をとらえやすくするために、数種類の関数について教材として適切であるかどうか検討するとともに、 b の刻み方についても細かく検討した。そして、作業の結果できあがる形が、生徒にとって馴染みのある放物線になるという点から、関数として $f(x) = \frac{1}{2}x$ を取り上げ、 $a=0$ の場合を扱うことにした。 b については、 $b=2$ から 1 刻みで $b=10$ まで増やしてゆき、求める部分の面積を細分化して幅 1 の長方形の面積の和で近似した。そして、これらの幅 1 の長方形をはさみやカッターで切り、座標軸と補助線が印刷されている台紙に貼って面積を積み重ねてゆくことにより、面積の変化の様子を視覚的にとらえることができるようにした。

以上の研究内容を、2 時間分の指導計画として具体化し、授業実践を行った。

3. 教材・教具の工夫

作業用教材や提示用教具について、以下のような工夫を行った。

(1) 作業用シートの作成

図1のような作業用シートを学校の設備に応じて作成できるよう、①～③の方法を考案した。いずれの方法も、視覚的な面に配慮し、色彩を有効に使うなどの工夫をしてある。

① 色上質紙に印刷したものを、はさみやカッターナイフを使って切り、糊で貼る方法。

② タックラベルに印刷し、はさみやカッター等を使って切る方法。

(印刷については、カラーレーザープリンタ等を利用すると長方形の部分に色もつけられる)

③ パソコンを利用したプリント&カット機(R社製)によるオリジナルシールを利用する方法。

図1 作業用シート

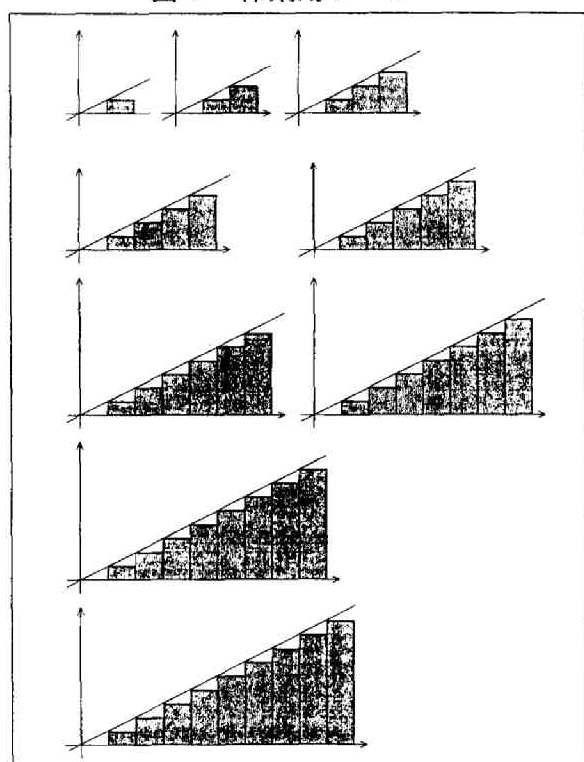
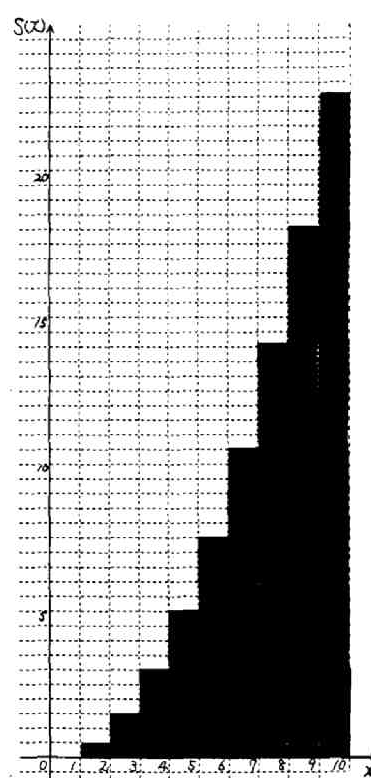


図2 台紙(完成したグラフ)



(2) 提示用教具の作成と工夫

生徒がとまどいなくスムーズに作業が行えるよう、黒板提示用として手元の作業用シートと同じものを準備した。

具体的には、シールの代わりに色つきのマグネットシートを用意し、作業後の長方形の角を強調するために、長方形の色とは対照的な目立つ色のカラーマグネットを使用した。台紙も拡大機(A4をA1サイズに拡大してくれる)を利用して作成し、黒板提示用とした。

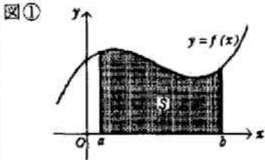
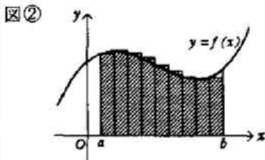
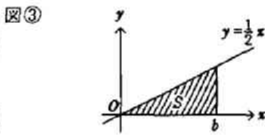
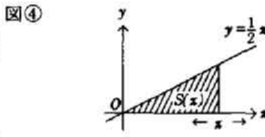
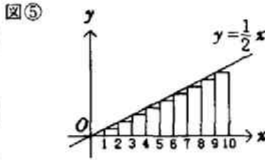
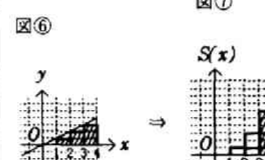
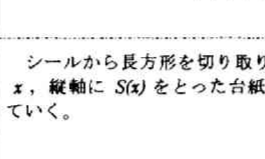
また、手作業では煩雑な2次関数の場合の面積の積み重ねの様子を、パソコンを利用してシミュレーションする教材を作成した。(23ページの図3)

4. 学習指導案

(1) 1 時間目

< 本時の目標 >

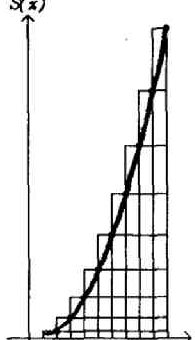
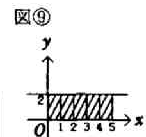
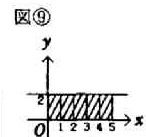
- ① 長方形に細分化して面積の近似値を求めることができる。(数学的な考え方)
- ② 細分化した長方形を積み重ねることによって、面積の変化がつかめる。(表現・処理)

時 間	指導内容	学習活動	指導上の留意点及び評価
導入 10分	曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a, x=b$ で囲まれた図形の面積 S を求めることを確認する。(図①) 面積を長方形の和で近似していく。(図②) 簡単のため、$f(x)=\frac{1}{2}x, a=0$ の場合を考える。(図③) 右端 b が変化すると面積 S がどのように変化するかを調べて手がかりを得る。 右端 x までの面積を $S(x)$ と表す。(図④)	板書された図を見てなにを求めるのか確認していく。 図①  図②  図③  図④ 	学習の目的として面積を求めることが正しく理解できている。 (関心・意欲・態度) 長方形に細分化して近似する意味がつかめる。(数学的な考え方) ここでは直線の式を示さなくても進めることもできる。 x を動かしたときに $S(x)$ の変化を見る。(数学的な考え方)
展開 15分	$x=1, 2, 3, \dots$ とし、幅1の長方形の面積の和を $S(x)$ の近似値とみなし、それが x の変化とともにどのように変化するかを調べる。(図⑤) ここで、作業用のシールと台紙を配布する。シールは、図⑤を9つ印刷して、長方形を切り取っていくためのもの。台紙は切り取った長方形を貼るためのもので、横軸に x、縦軸に $S(x)$ をとる。 長方形の幅を1にしているの、高さで面積の値は等しくなる。よって、長方形を切り取って積み重ねていけば、その高さが $S(x)$ を示すことになることを説明し、はじめの $x=3$ または 4 までの部分を黒板にマグネットシートを貼って実演する。(図⑥、⑦)	図⑤  図⑥  図⑦ 	図⑤はあらかじめ紙に書いたものを黒板に掲示する。 また、各長方形の大きさに合わせて、色つきのマグネットシートを切っておく。 横軸に x、縦軸に $S(x)$ をとった台紙(図⑦の台紙)も、黒板掲示用に作成しておき、その上にマグネットシートを貼って実演し、生徒の作業を確実に進められるようにする。
作業 20分	作業をはじめさせる。	シールから長方形を切り取り横軸に x 、縦軸に $S(x)$ をとった台紙に貼っていく。	面積を求める作業が正確にできる。 (表現・処理)
まとめ 5分	作業の確認と次回の予告。 まだ終わっていない者は完成させておくように指示する。		作業の意味、完成したグラフの意味を理解できている。 (知識・理解)

(2) 2 時間目

< 本時の目標 >

- ① 作業で得たグラフが放物線に近い曲線であることを理解しようとする。(関心・意欲・態度)
- ② 面積を求める関数とグラフが一致していることを確認できる。(表現・処理)
- ③ 原始関数と面積を表す関数の関係を理解できる。(知識・理解)

時 間	指導内容	学習活動	指導上の留意点及び評価
導入 10分	前回の作業を確認しながら黒板で図⑧を提示する。	前回の作業を思い出し、自分で作成した図と見比べる。	時間節約と前回の作業確認のためいくつかを実演する。
展開 20分	図⑧から、$S(x)$ がどのような変化の仕方をしているかを考えさせる。 図⑧の長方形の右上角を結んでみせる。 実際の $S(x)$ を計算させて、$S(x)$ が x の 2 次関数になっていることを確認する。 $f(x)$ が定数の場合についても考えてみる。 $f(x)=2$ として、$S(x)$ の変化を図に示す。(図⑨、⑩) $S(x)$ がどのような変化の仕方をしているか考えさせる。 $S(x)$ が x の 1 次関数になっていることを確認する。 $f(x)$ と $S(x)$ とはどのような関係にあるか考えさせる。	図⑧ $S(x)$  長方形の角を結ぶと、放物線らしき曲線になることを見出す。 $S(x)$ は底辺 x、高さ $\frac{1}{2}x$ の三角形の面積だから、 $S(x) = \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x^2$ 図⑨ (完成図)  図⑨  長方形の角を結ぶと 1 次関数のグラフになることを見出す。 $S(x)$ は縦 2、横 x の長方形の面積だから、$S(x)=2x$ $f(x)=\frac{1}{4}x$ の場合は $S(x)=\frac{1}{4}x^2$ $f(x)=2$ の場合は $S(x)=2x$ いずれも、$S'(x)=f(x)$ になっていることを見出す。	長方形の角をカラーマグネットを使い強調する。 放物線であることがわかる。 (関心・意欲・態度) 1 時間目の図④参照。 三角形の面積として求めた関数と作業で得られたグラフが一致していることを理解できる。 (表現・処理) 図⑨と、1 時間目の図⑦と同様の台紙を黒板に掲示する。 また、各長方形の大きさに合わせて、色つきのマグネットシートを切っておく。 生徒を前に出して、マグネットシートをはって図⑩を作成させる。 定数関数に関して同様の処理ができる。 (数学的な考え方) (表現・処理) 計算により、$S(x)$ が原始関数になっていることがわかる。 (知識・理解)
問題 15分	問題を印刷した紙を配る。 問題の内容は次の通り。 (1) $f(x)=3$, (2) $f(x)=x$ (3) $f(x)=-\frac{1}{4}x+3$ の各々の場合について、$S(x)$、$S'(x)$、$\int f(x)dx$ を求めさせる。	問題を解く。いずれの場合も $S'(x)=f(x), \int f(x)dx = S(x)+C$ となっていることを確認する。	問題を解ける。(表現・処理) この C の意味について疑問を持つ生徒も出ると思われるが、後の定積分のところで解決する。
まとめ 5分	$f(x)$ が 2 次関数の場合に同様のことをすると、$S(x)$ は 3 次関数になる。 この場合も $S'(x)=f(x)$ となっている。 このことは、先ほどの練習問題のように計算してみせることはできないが次回、一般に $S'(x)=f(x)$ が成り立つことを証明する。	コンピュータで作成した図を見せる。	$S'(x)=f(x)$ のイメージがわかる。 (数学的な考え方) (知識・理解)

5. 授業実践

この指導案に基づいて、全日制商業科3年生2クラスで授業実践を行った。

(1) 作業用シートについて

1組では、19ページの(1)②のタックラベルを用い、2組では、③のオリジナルシールを用いて授業を行い比較した。

1組では、切り取ったり裏の紙を剥がしたりするのに手間取り、最も早い生徒でも20分かかった。個人差も大きく、授業時間内に終了した生徒はほぼ半数にとどまった。また、作業を中程まで終えた生徒から、「長方形の縁に切り込みが入れてあればいいのに」「切り貼りしなくても書いていけばいいのではないか」などの声が出た。

2組では、最も早い生徒は12分で終了し、20分余りで全員が終了した。個人差も少なく、すべての生徒が最後まで興味をもって作業に取り組んだ。予定していた時間より早く終了したので、放物線を発見させる所まで1時間で進めることができた。結果としては、この方が授業としてのまとまりが良かったようである。

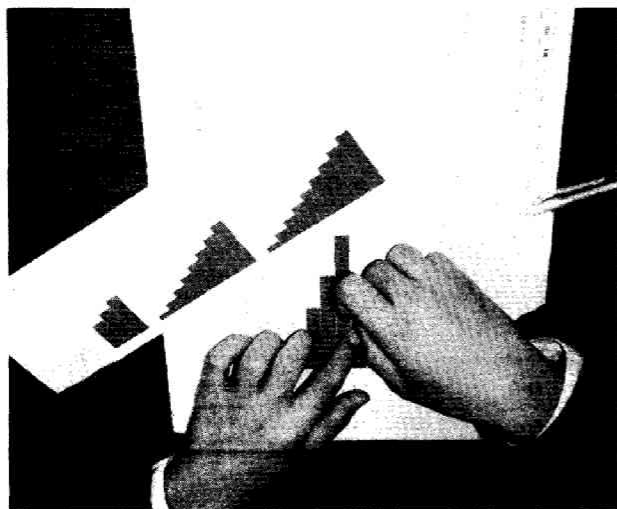
2クラスの比較から、ただ剥がして貼るだけで済むオリジナルシールの方が作業する上では優れていることが確認できた。

(2) 放物線の発見について

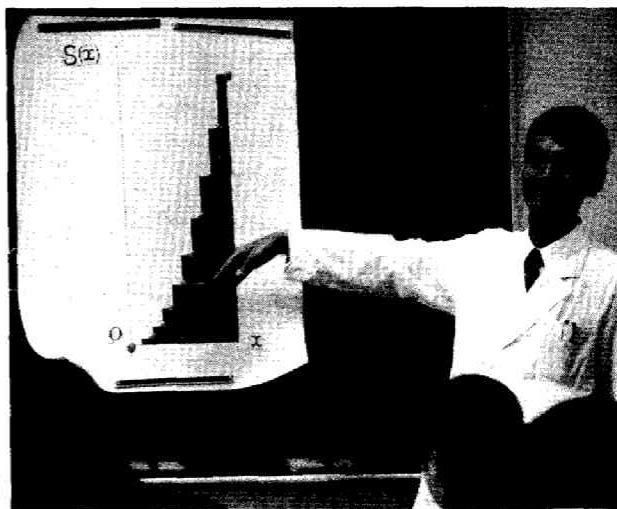
数人の生徒は、長方形の角を結ぶと放物線になることに作業中から気付いていた。作業終了後には、約3分の1の生徒がこのことに気付いていたようである。ただ、 $S(x)$ の増え方をどのように表現したらよいのか分からない様子だった。そこで、黒板に提示した完成図の各長方形の右上隅に、小さなカラーマグネットを付けて見せた。すると、生徒はすぐに分かったようで、「放物線」「2次関数」という言葉が生徒の口から発せられた。このことに関しては2つのクラスで差異は見られず、どちらのクラスでもこちらの意図した通りの授業を行うことができた。

以下に、放物線を発見する部分の授業について、生徒の感想を列挙する。

- ・最初はよく分からなかったけど、結果が出たとき『なるほど』と思った。
- ・あのブロックがだんだん2次関数の形になっていくのを見て、少しビックリしました。



(授業風景1)



(授業風景2)

- ・自分でシールを貼ってグラフ状にしていくうちに、2次関数が見えてきた。なにかとてもうれしかった。勉強しているという気になった。
- ・放物線になるとはおもしろい。
- ・シールを貼ることで2次関数が出てくるとは思わなかった。このような授業は大いに印象に残ると思う。

(3) 作業後の授業の展開について

$f(x)=2$ のときに $S(x)=2x$ となることを図で示した後、 $S'(x)=f(x)$ であることを説明したが、生徒は急に難しい内容になったと感じたようである。ここでは、練習問題をきちんと解けるようにするためにも丁寧な説明が必要である。

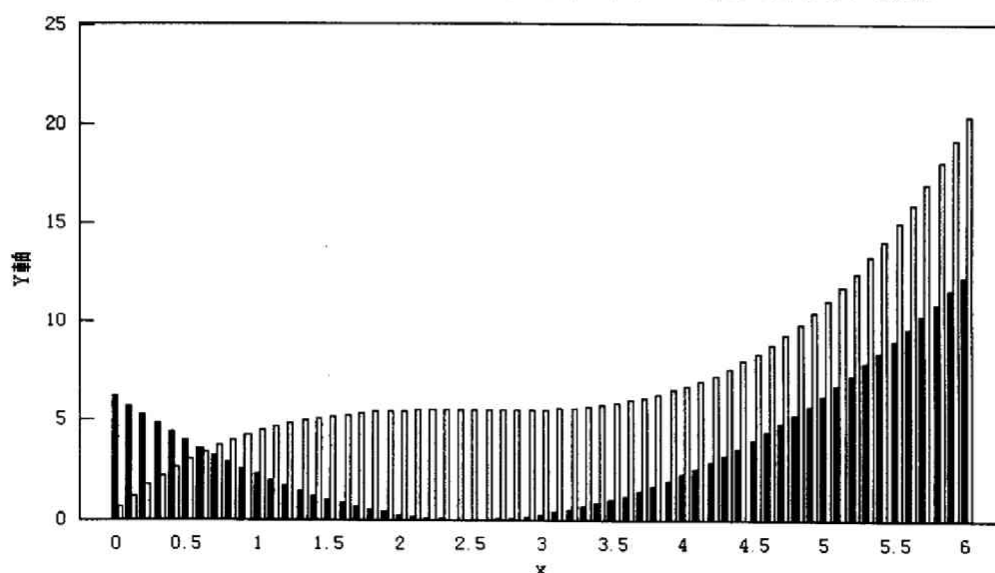
また、2時間目の授業は内容が多いので、生徒の理解に応じて、練習問題の解答やパソコンで作成した図を見せる部分は次の時間に持ち越してもよい。

(4) 今回の授業全体についての生徒の感想

- ・図を書くより、シールを貼った方が分かりやすく感動があつてよかった。
- ・作業をしながら考えたり、結果が見えてくるのが楽しかった。
- ・作業を通して行う授業は、自分で考える力がつくのでよいと思いました。
- ・普段の授業よりも、作業をして自分で発見できるという授業の方がおもしろかった。
- ・図をかいた紙などの用意があったので、スムーズに進んだと思う。ペースもゆっくりめで、十分ついていける程度だったので分かりやすかった。
- ・生徒が置いていかれることなく、授業が進んだ。
- ・あのような授業ばかりだったら数学も好きになれそうな気がした。
- ・グラフをみてどういう関係なのかということは分かったけれど、何のためにこのようなことをしたのかということがよく分からなかった。
- ・あのグラフをどうやって作ったのか、いま一つ理解できなかった。
- ・少しばかり、小・中学校の授業のような気もした。

図3 パソコンによる出力例

$f(x)=(x-2.5)^2$ の場合 (0.1刻み)、 $f(x)$ と $S(x)$ を同時に表示



6. 分析と考察

不定積分の導入、あるいは導入後の学習で、被積分関数と不定積分の関係を、面積を表す関数のグラフを作成する作業を通して実感させることをねらいとしたが、生徒の反応や感想から判断すると、このねらいは概ね達成されたと考えられる。

積分と面積の関係に関しては、半数以上の教科書が $S'(x)=f(x)$ によって示しているが、この示し方だけでは、その内容を生徒が必ずしも実感できない面がある。今回の研究では、多くの生徒が、作業を通して積分と面積との関係を視覚的にとらえ、興味をもって課題に取り組んでいた。授業の中で、生徒が互いに教えあいながら喜々として作業をしている光景も見られるなど、生徒は自分のペースで学習することができた。特に2組では作業が早く終了し時間の余裕ができたので、作成したグラフの意味についても考察したが、生徒はその点についてもしっかりと理解していた。ただ、作業に入る前に、長方形の和により面積の近似値が求められることや、作業の方法と意味などについて、生徒に対し明確に示しておくことが必要であると感じた。

また、作業が終了しまとめの指導をする際にパソコンなどの機器を利用したが、これらの機器は、2次関数や3次関数などの例についても短時間で表示することができ、非常に有効であることが確認できた。

さらに、作業の結果をもとに、微分と積分の関係を認識させることをねらいとして問題演習を実施したが、演習を通して、生徒は、微分と積分の関係についての理解を深めることができた。最終的に示された、 $\int f(x)dx=S(x)+C$ の式が、積分と面積の関係を簡潔に示すものであることに感動した生徒も多く、今回の指導が予想以上の成果をもたらしたものと思われる。

7. まとめと今後の課題

上述したように、今回の研究については、当初の目的は概ね達成されたと考えられるが、改善すべき点もいろいろとあげられる。例えば、生徒の作業進捗の違いをあらかじめ予想し、こちらでシールを準備して作業時間の短縮を図ったが、このようなシールを作成できる設備を有する学校はごく少数である。また、作業手順を徹底することにのみ重点をおくと、生徒が作業の目的を見失う可能性が高くなる。さらに、パソコンによる提示についても、表計算ソフトなどをある程度操作できる教員がいなければ難しい。

本研究では、研究内容を積分と面積の关系到に絞り、「積分て何だろう？」という視点から考察したが、微分の導入に当たって、今回実施した積分の導入方法と関連づけた内容にできれば、学習成果はさらにあがるはずである。数学の授業は現在でも講義形式のものが多く、本研究では、この点を改善し生徒が意欲的に学習に取り組めるよう、これまでの研究を参考にして作業を取り入れた授業を実践した。実践した結果は、普段以上に積極的な発言や態度が見られ、満足のいくものであった。

今回の研究を契機とし、生徒が主体的に取り組める教材の開発や指導方法について、今後とも研究を続けていきたいと考えている。