

高等学校

平成 9 年 度

# 教育研究員研究報告書

数 学

東京都教育委員会

## 主題 生徒に興味・関心をもたせ、数学的な思考力を高める教材や指導方法の工夫

### 主題設定の理由

高等学校の数学科の目標の一つに、「数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる」ことがあげられる。しかし、中学校から高等学校へ進むにつれて次第に抽象的な内容が増え、数学が比較的得意な生徒と苦手な生徒とに分かれ、数学嫌いが増えていく傾向にあると言われている。

「教育課程の基準の改善の基本方向について」（教育課程審議会：平成9年11月）では、「生徒の興味・関心、特性等に応じて多様な選択ができるような数学学習の系統性と生徒選択の多様性の双方に配慮」し、「数学的な見方や考え方を社会生活に生かすことができる内容」を取り入れた科目構成や内容について検討していくことが示されている。

本研究の主題では、生徒が数学の学習に主体的に取り組むことができるような教材の開発と指導方法の工夫に視点を当て、実践授業を通して分析・考察することにした。

### 平成9年度教育研究員（数学）名簿

班	研究テーマ	学校名	氏名
I	日常的な題材による導入と具体的な作業を通した等比数列の和の指導	都立大泉高等学校	藤本 淳
		都立文京高等学校	吉田 亘
		都立豊多摩高等学校	田中 茂樹
		都立忠生高等学校	中村 久
		都立久留米西高等学校	原田 能成
II	課題学習を通して自ら学び自ら考える力を育てる確率の指導	都立北野高等学校	黒崎 康弘
		都立上野高等学校	大村 勝久
		都立化学工業高等学校	石崎 規生
		都立東大和南高等学校	中村 直治
		都立調布南高等学校	吉田久仁子
III	コンピュータを活用した関数の理解を深める指導と教材の工夫 —身近な事象から指数についての関数関係を発見する活動を通して—	都立松原高等学校	長友 信子
		都立篠崎高等学校	遠藤 康司
		都立紅葉川高等学校	小林 勝也
		都立片倉高等学校	樋川 浩史
		都立武蔵野北高等学校	高橋 誠二

担当 教育庁指導部高等学校教育指導課指導主事 星野文男

主題 生徒に興味・関心をもたせ、数学的な思考力を高める教材や指導方法の工夫

目 次

<b>I 日常的な題材による導入と具体的な作業を通した等比数列の和の指導</b>	
1. 研究のねらい .....	2
2. 研究の内容・方法 .....	2
3. 教材と指導方法の工夫 .....	3
4. 指導計画 .....	5
5. 授業記録 .....	5
6. 分析と考察 .....	7
7. まとめと今後の課題 .....	9
<b>II 課題学習を通して自ら学び自ら考える力を育てる確率の指導</b>	
1. 研究のねらい .....	10
2. 研究の内容・方法 .....	10
3. 指導方法の工夫 .....	11
4. 授業実践 .....	11
5. アンケート結果 .....	16
6. 考察 .....	17
7. 今後の課題 .....	17
<b>III コンピュータを活用した関数の理解を深める指導と教材の工夫</b>	
——— 身近な事象から指数についての関数関係を発見する活動を通して ———	
1. 研究のねらい .....	18
2. 研究の内容・方法 .....	18
3. 指導方法と教材の工夫 .....	19
4. 指導案 .....	21
5. 授業実践 .....	22
6. 分析と考察 .....	23
7. まとめと今後の課題 .....	24

# I 日常的な題材による導入と具体的な作業を通した等比数列の和の指導

## 概要

等比数列の和の指導において「複利計算法による積立預金」を例に導入し、「色別タイル」を用いて等比数列の和についての規則性を発見し、公式を証明する手がかりをつかみながら一般化していく指導を行った。授業後、生徒は等比数列の和を求めることに興味・関心をもちながら多様な方法で公式を導き、答を求める過程で数学的に考えるようになった。今後、日常的な場面と関連させながら、公式を活用する機会を増やすことが課題である。

### 1. 研究のねらい

新聞記事の紹介と複利計算法による積立預金の計算など、日常的な題材を導入として扱うことによって、生徒に等比数列の和を求めることに興味・関心をもちさせるようにする。次に、色別タイルを用いて等比数列の和を視覚的に捉えさせ、生徒自らがタイルを並べ替える作業を通して公式を一般化し、数学的な思考力を高めていくことを目指した(図1)。

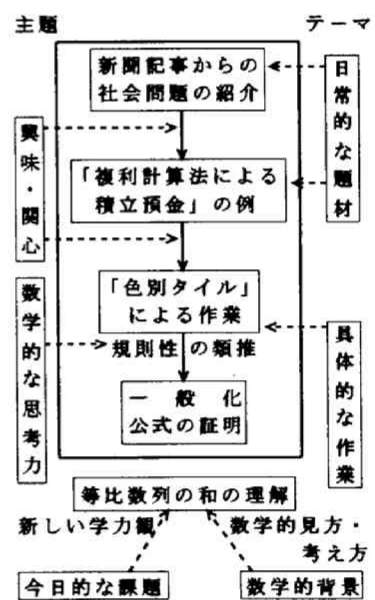
#### (1) 研究の視点

授業を通して、次の視点から分析・考察を行った。

- ① 生徒の興味・関心等について
- ② 色別タイルの作業の結果について
- ③ ある生徒の色別タイルによる解答について
- ④ 等比数列の和の公式の理解について

#### (2) 今日の課題と数学的背景との関連

文部省教育課程実施調査(1995, 96)によれば、「自ら考え表現する『新しい学力観』に立った能力が弱い傾向がある」との指摘がある。「数学科の指導においてスローラーが発生する要因としては、数学の概念や法則が非具体的である」と述べられている(嫌[3])。そこで、生徒自らが色別タイルを並べ替える作業により、等比数列の和を具体的に把握し、規則性の発見を通じて自ら考え表現する能力の育成を目指す。「帰納的な考え方」(嫌[2])を用いて、規則性から一般化へと導く。「数列の一般項や有限個の項の和について取り扱い、それらの理解と活用を図る」(嫌[1])のために基本的な内容を重視し、数学的な見方・考え方を育成するために指導案を作成した。



[図1: 主題やテーマとの関連]

### 2. 研究の内容・方法

- (1) 導入時に複利計算法による積立預金の例を取り扱うことが効果的か、色別タイルの作業が等比数列の和の理解の助けとなるか、この指導案が公式の理解度を深めたか、生徒のつまづきの原因はどこかなどについて研究する。
- (2) 日常的な生徒の学習活動を視野に入れ、実践性を重視して、研究授業のVTR記録及び

生徒のワークシートの解答やアンケートの結果を分析し、考察を進める。

(3) 1人の生徒の学習の経過を追うことにより、思考過程を分析する。

### 3. 教材と指導方法の工夫

#### (1) 日常的な題材による導入

生徒の興味・関心を高めるため、等比数列の和を導入するとき、日常的な題材として新聞記事からのローン破産など社会問題を紹介する。

「複利計算法による積立預金」を例に、生徒が電卓で計算した結果をワークシートに記入する。この計算を通して、各回の積立金が等比数列になることを確認させるとともに、積立合計が等比数列の和になることを理解させる。パソコン（表計算ソフト）を利用して、様々な金利についての積立合計を調べ、金利100%の場合が公比2の等比数列の和になることを理解させる。

教科書「数学A」における金利例の取扱いについて、現在発行されている教科書23冊を調査したところ、83%が複利計算法による積立預金の例を載せている。しかし、等比数列の和の単元のまとめや発展として扱われている(図3)。教師に対する指導法の調査においても、金利などを例として扱わない場合が42%で、扱っている教師のうち、92%が指導後の応用として扱っていることが分かった(図4)。

#### (2) 色別タイルの利用

等比数列の和の証明法は、公比倍した総和から総和を引く( $rS_n - S_n$ )。この方法は、等差数列の和の証明法に比べて技巧的である。そこで、公比2の場合では、色別タイルを用いて等比数列の和を視覚的に捉え、色別タイルを並べ替えるなど試行錯誤を通して規則性を類推する。また、公比3の場合では、色別タイルを用いて公比倍することの理由や引くことの意味を視覚的に捉えさせる。生徒自身に色別タイルを操作させることは、等比数列の和の公式を導く過程を視覚的に捉え、一般化した公式の意味についての理解を助けるのに有効であると考えられる。

##### ① 公比2の場合

$1+2+2^2+2^3$  について、ワークシート(図5)に、色別タイルを並び替えた結果を記入させる。このとき、色別タイルの合計を表現する計算式も記入させる。思いついた並べ方全てについて同じ作業を繰り返し、書き出したものについてどの式や考え方が適切か、(◎○△×)で自己評価を記入させる。次に、色別タイルを増やし、第4項

Q. 年利5%、1年毎の複利で毎年1万円ずつ積み立てるとき、9年後の積立額の合計を求めよ。

	現在	1年後	2年後	...	9年後	
1回	1.0000	1.0500	1.1025	...	1.5513	$1万 \times 1.05^9$
2回		1.0000	1.0500	...	1.4775	$1万 \times 1.05^8$
3回			1.0000	...	1.4071	$1万 \times 1.05^7$
⋮					⋮	⋮
10回					1.0000	1万
合計	1.0000	2.0500	3.1525	...	12.578	

〔図2:生徒に配布したワークシート(一部)〕



〔図3:教科書における金利例の取扱い〕



〔図4:等比数列の和の指導法の〕

1回目に考えたもの

計算式	自己評価
-----	------

◎ 1番うまくいった ○ まあうまくいった  
△ それほどでもない × 間違え、よくない

〔図5:色別タイルの解答用紙(一部)〕

までの規則が適用できるか確認させる。そこで、生徒の代表に自分の解答を発表させ、どの考え方が一般性のある考え方かを検討させる。その後、タイルを増やして $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=2^6-1$ の発見まで結びつける。これを一般化して、 $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}=2^n-1$ になることを類推させる。

### ② 公比3の場合

公比2の場合において類推した式  $1+2+2^2+\dots+\dots+2^{n-1}=2^n-1$  に公比のみを変えることで、公比3の式になるか発問する。生徒が電卓を用いて、左辺  $A=1+3+3^2+\dots+3^{n-1}$  と  $B=3^n-1$  を計算し、その結果をワークシートに記入させる(図6)。生徒がAとBの関係について  $2A=B$  であることを発見した後、色別タイルを用いてこの関係の正しいことを、教師が次のように説明する(図7)。

- ・公比が3であるから1, 3,  $3^2$ のタイルを3組用意する。
- ・前述「2倍」を再確認し、 $3-1=2$ であるから、1組の色別タイル1, 3,  $3^2$ を取り除く。
- ・残った色別タイルは2組分となり、「2倍」と関連づけを図る。
- ・最後に2組の色別タイルを並び替えると、 $3^3-1$ の形になることを提示する。

以上のように「公比倍してから引く」ということを強調するとともに、この方法が第4項までの和 $1+3+3^2+3^3$ に適用できることを同じ方法により示す(図7下)。

### ③ 公比4の場合

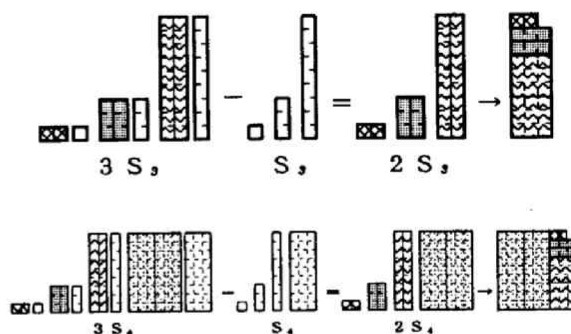
(公比-1)=3組の色別タイルは、 $4^n-1$ の形として並び替えることができることを生徒に確認させる。

### ④ 色別タイルの作り方

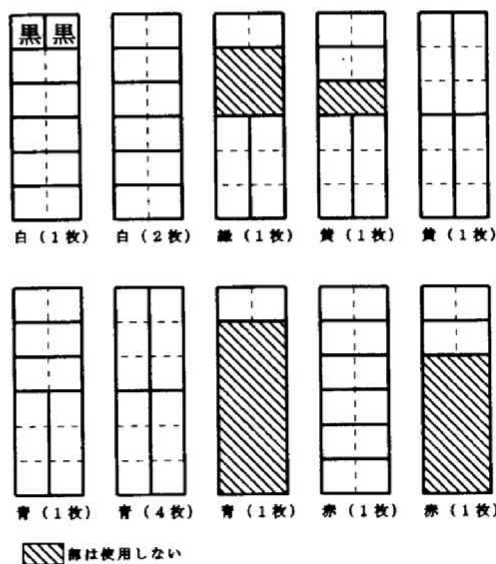
公比2と公比3の黒板提示用タイルの作成方法であるが、タイルと項数との対応を明確にするために、各公比とも項ごとに同じ色(初項から順に、黒、緑、黄、青、赤、白)を用い、公比の大きさに裁断した。また、教師用と生徒用の各項ごとの色は同じである。教師用の色別タイルは、市販されているカラーマグネットシート(300×100)である。公比2の場合は第6項まで1組、公比3の場合は第4項までに $3S_4-S_4=2S_4$ となるため、最低2組必要である(図7)。

	A	B	AとBの関係
$S_1=1+3$		$3^2-1$	
$S_2=1+3+3^2$		$3^3-1$	
$S_3=1+3+3^2+3^3$		$3^4-1$	
$S_4=1+3+3^2+3^3+3^4$		$3^5-1$	

〔図6:ワークシート(公比3の場合の和と $3^n-1$ の比較)〕



〔図7:色別タイルによる $3S_n-S_n$ の説明〕

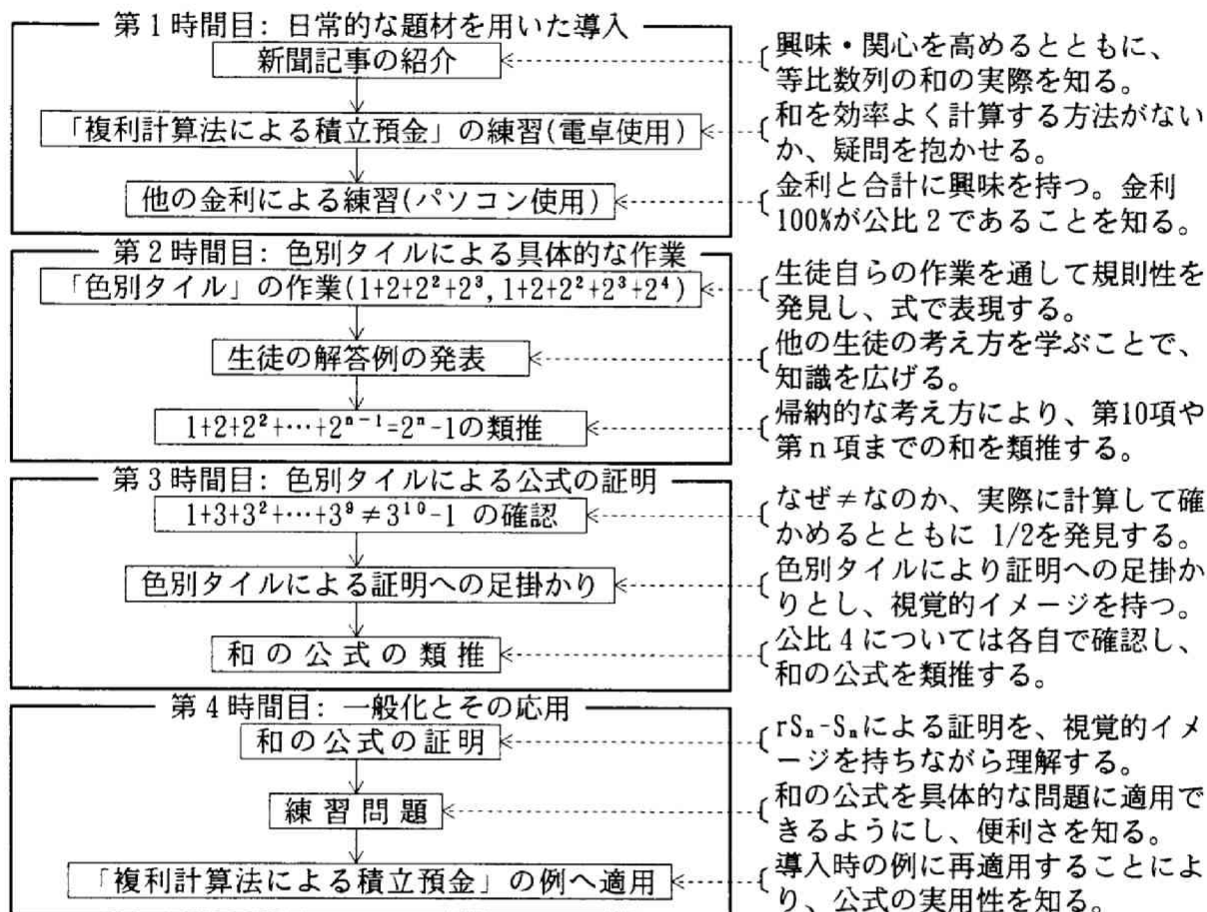


〔図8:カラーマグネットシートの裁断図(公比2, 3)〕



#### 4. 指導計画

テーマに基づいて作成した指導案の全体図を示す(図2)。等比数列の一般項までの学習を終了した生徒を対象とし、等比数列の和を4時間で学習する。

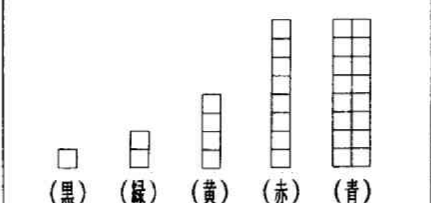


[図9:指導全体の概略と主なねらい]

#### 5. 授業記録

##### (1) 指導案

本時の目標：公比2の等比数列の和を色別タイルにより視覚的に捉え、生徒自らが並べ替えることにより、和の規則性を発見する。

時間	指導内容	学習活動	指導上の留意点及び評価
5分	復習と本時の学習内容の説明  等比数列の和と色別タイルの関係の説明	板書 $1+2+2^2+\dots+2^{10}=\dots$ 板書 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ 	<ul style="list-style-type: none"> <li>複利計算法の例を踏まえ、和の計算をする理由を強調する。(興味・関心)</li> <li>第何項であるかが分かるように色別されていることを説明する。</li> </ul>

欄	指導内容	学習活動	指導上の留意点及び評価
展開 30分	プリントの配布 色別タイルの作業目標の指示	板書 並べ方を工夫しながら、規則を見つけ、和を簡単な式で表そう 作業① $1+2+2^2+2^3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>・補足説明として <math>1+2, 1+2+2^2</math> について演習する。</li> <li>・消しゴムを使わず、考えた順に自由に記入させる。(興味・関心)</li> <li>・計算式を書けない場合は考え方を質問し、指導する。(表現・処理)</li> <li>・予想される生徒の解答に対する指導方法を準備する。(知識・理解)</li> <li>・共通性はどこか、<math>S_n</math> に適用できるものはどれかを説明する。(数学的見方・考え方)</li> <li>・全員に再確認させてから作業に取り組む。</li> </ul>
	色別タイル(黒～赤)の配布 個別指導	色別タイルを並べた状態を、輪郭のみを記入する。 計 算 式   自 己 評 価 (図5参照) ◎ ○ △ ×	
	生徒の解答例の発表	作業② $1+2+2^2+2^3+2^4$ (作業①と同じ)	
30分	色別タイル(白)配布	作業③ $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5$ (作業①とほぼ同じ)	
まとめ 10分	計算式によるまとめ $S_n = 2^n - 1$ の類推 次回の予告	板書 $1+2+2^2+2^3 = 16-1=2^4-1$ $1+2+2^2+2^3+2^4 = 32-1=2^5-1$ $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5 = 64-1=2^6-1$ 板書 $1+2+2^2+\dots+2^{10} = 2^{11}-1$ $1+2+2^2+\dots+2^{n-1} = 2^n-1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>・<math>2^n-1</math>の形になっていることを強調する。(数学的見方・考え方)</li> <li>・類推の段階であることを強調する。</li> </ul>

[表2:指導案(第2時間目:色別タイルによる具体的な作業)]

## (2) 研究授業

指導案(表1)に従い、都立高等学校定時制普通科第2学年(22名、「数学A」2単位)の生徒を対象に研究授業を実施した。以下はその様子や生徒の解答例、参観者からの意見である。

### ① 導入部分

前時に学んだ複利計算法による積立預金について復習し、その合計額が等比数列の和になることを確認させた。本時のテーマ「並べ方を工夫しながら、規則を見つけ、和を簡単な式で表そう」を示し、初項1公比2の等比数列の第11項までの和を板書した。そして、具体的に第3項まで提示用色別タイルを並べ替えることにより、和を求めるという操作を説明した。

### ② 生徒の取組み

具体的なタイルを並べるという操作であったため、生徒は真剣に取り組んでいた(図10)。作業の目的がはっきり理解できない生徒には、個別指導を行い並べ方を例示した。その後、内容を理解すると、積極的に作業に取り組む様子が見られた。ほぼ20分間で第4項までの和と第5項までの和について作業を終了した。



[図10:色別タイルの作業]

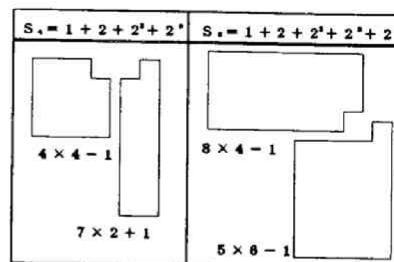


### ③ 作業の方法

生徒が作業した結果は、予め方眼紙のみを印刷したプリント（図5）に、解答数を制限せず、消しゴムを使わずに記入させた。

### ④ 生徒の解答

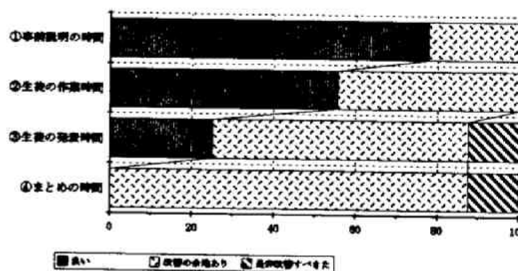
考え方の異なった3人の生徒に黒板で解答を発表させ（図11）、その考え方を説明させた。2種類の考え方の特徴を説明し、第6項までの和に適用できる内容はどれか考えさせ、さらに白タイルを配布して作業させた。



〔図11：生徒の解答〕

### ⑤ 研究授業の評価

終了後、研究授業アンケートを実施した（図12）。意見の中に、「作業内容の指示において、『並べ方を工夫する』という言葉が生徒に理解しやすいか。別の表現で表せないか」といったものがあった。また、「『余分なタイルを1枚加え、長方形を作りなさい』という発問ではどうか」という指摘もあった。「作業を始めるに当たり『失敗してもいい』という発問は、生徒の積極的な取組みを促進する」という意見もあった。



〔図12：研究授業アンケート〕

## 6. 分析と考察

### (1) 生徒の興味・関心等について

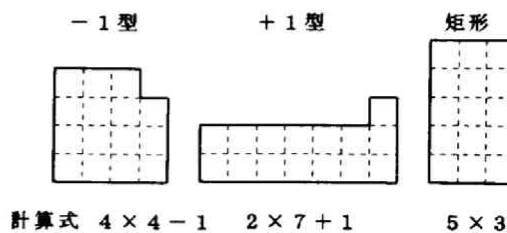
図13は、第4時間目の授業終了後に行ったアンケートの結果である。新聞記事からの社会問題については、興味・関心が他の項目に比べて低いことが分かる。生徒は具体的作業に対して関心が高い結果を示している。また、導入時に複利計算法の積立預金の例を示し、電卓やパソコンを用いた計算を行ったことは、84%の生徒が面白かったと答えている。最も関心を示している色別タイルの作業は、73%の生徒が等比数列の和を視覚的に捉えることができた」と答えている。これは高等学校においても、色別タイルが教材として効果的であることを示しているとともに、数学的な見方・考え方を育成することができる」と考えられる。



〔図13：生徒の興味・関心〕

### (2) 色別タイルの作業の結果について

和の項数ごとに生徒が考えたすべての解答を長方形から1つ少ないと考えたもの(-1型)、長方形に1つ加えたと考えたもの(+1型)、長方形に並べたもの(矩形)とその他に分類し、その解答数をまとめたものが図14である。図15から分かるように項数が増えるに従い解答数は減少している。



〔図14：解答のパターン〕

第4項までの和では、2個以上解答したものが全体の83%である。これは、いろいろな並べ方の工夫を試みて作業に集中している結果と判断できる。

「その他」が最多(62%)である。これは、この時点では発問の内容を十分に理解していない生徒がいると考えられる。

第5項までの和  $S_5$  では、解答数が半数以下に減っている反面、+1型が増加している。個数の減少は時間不足によるものと考えられるが、+1型の増加については、 $S_5 = 31$ を $30+1$ と考えている生徒が多いことが後日の調査より判明した。

第6項までの和では、-1型の解答が75%ある。これは、第6項までの和の作業を行う前に考え方を黒板で検討し、 $2^n - 1$ を意識してタイルを並べた結果と考えられる。

以上の結果から、色別タイルによる作業が、生徒の自ら考える姿勢を促すと考えられる。

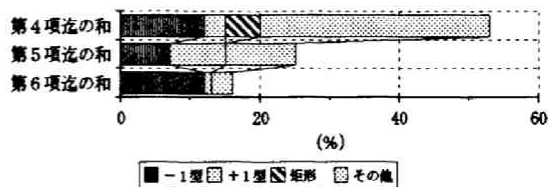
(3) ある生徒の色別タイルの解答について

生徒Rの解答(表2)やVTR記録、面接から、色別タイルによる作業が、どのような数学的な思考を促すかについて分析を行った。

- (1回目の解答) 初めに長方形を考えている。 $1+2+2^2+2^3=3 \times 5$ であるので、この型以外の長方形はあり得ないが、これと同じ型の解答をした生徒は25%いた。Rは形が安定しているということで、「長方形に並べた」と言っている。
- (2回目の解答)  $3 \times 4$ の長方形に3を加えたものとして考えているが、やや自然でないと考えて○にしたとのことであった。
- (3回目の解答) 解答に至るまで3分間の間隔がある。これは2回目と同じ並べ方ではあるが、正方形を中心にした考え方に変えたものである。数え方の視点を変えるのに時間がかかったものと判断できる。正方形が $4 \times 4$ と表せることから、自己評価は◎になっている。
- (4,5回目の解答)  $3 \times 4$ 型、 $4 \times 4$ 型を考え尽くしたので、Rは $2 \times 8$ 型に考えを進めている。4回目は2回目に考えた方法と同じく長方形の和との見方で式を作成し、5回目は3回目と同じく長方形から1つ不足したとする考え方をしている。

タイルの作業結果(延べ数)

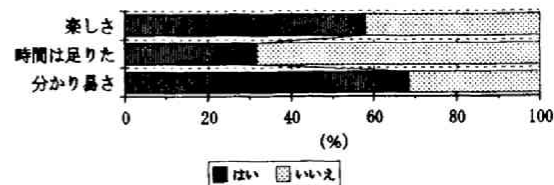
生徒数20名



〔図15: 色別タイルの解答分布〕

授業の感想

第2時間目(研究授業)



〔図16: 色別タイルの生徒の感想〕

解答順序	1回目の解答	2回目の解答	3回目の解答	4回目の解答	5回目の解答
時間	~40秒	~3分50秒	~4分20秒	~4分50秒	~5分40秒
生徒Rの色別タイルの並べ方					
計算式・自己評価	$3 \times 5$ ◎	$3 \times 4 + 3$ ○	$4 \times 4 - 1$ ◎	$2 \times 7 + 1$ ○	$2 \times 8 - 1$ ◎

〔表3: 生徒Rの色別タイルの解答(時間順)〕

このように、「飛び出ている所に目がいく」ため、まず、「長方形の和」と考える傾向があり、差の考え方は、「規則性のある簡単な式」を求めるために、試行錯誤の中から生まれている。タイルが柔軟に考える姿勢を養い、数学的な見方・考え方を促す教材になっていると考えられる。

#### (4) 等比数列の和の公式の理解について

この指導案に基づいて授業を行ったクラスと、タイルを用いずに授業を行ったクラスを対象に、第4時間目の授業を実施後、具体的な等比数列の問題について比較調査を行った。公式を用いる練習の時間が不足していたため正解率は2クラスとも低かったが、等比数列の基本事項に関する理解にはあまり差はみられなかった。しかし、等比数列の和を具体的に求める問題については、タイルを用いないクラスは公式暗記型の解答のみだったのに比べ、タイルを用いたクラスには、公式の証明法に従って解答を試みた生徒がいた。タイルによる操作が規則性の発見を促し、公式を導いていくための論理的な思考を促すことになり、生徒の数学的な考え方に影響を与えたと考えられる。

### 7. まとめと今後の課題

等比数列の和の指導において、色別タイルの利用と日常的な題材とを関連させて指導した結果、次のようなことが分かった。

- ① 色別タイルの利用は、等比数列の和を具体的に視覚化し、生徒が等比数列の和を定式化するため主体的な取扱いを促し、規則性を発見させるのに助けとなった。
- ② 規則性が発見できた生徒は、その後の学習においても積極的な姿勢が見られ、発見をした経験や操作的な学習が、学習活動の動機づけに効果的であることが分かった。
- ③ 導入時に等比数列の和の日常的な題材を取り扱うことは、学習の動機づけという観点から有効であった(図1)。

今後の課題として、色別タイルの作業の時間配分を生徒の実態にどう合わせるか、生徒の自由な発想を引き出すための発問の工夫、多くの生徒が積極的に取り組むための討論の工夫があげられる。

#### 〔参考文献〕

- [1] 文部省, 高等学校学習指導要領解説数学編・理数編, ぎょうせい(1990)
- [2] 都立教育研究所数学研究室, 高等学校数学における数学的な見方や考え方を育てる指導の在り方に関する研究(1996), pp. 6~9
- [3] 古藤怜, 数学科における学習指導, 共立出版(1982), pp. 60~62
- [4] 松原元一, 数学的見方考え方, 国土社(1990)
- [5] 坂元昴, 子どもを生かす授業のしくみ, ぎょうせい(1988)

## II 課題学習を通して自ら学び自ら考える力を育てる確率の指導

### 概 要

生徒一人一人が日常生活の中から確率に関する課題を見つけ出し、本や資料を調べたり教師の支援を受けたりして、生徒自らが課題を解決していく指導を行った。また、生徒が解決したことについて、生徒相互に発表したり協議したりすることによって、生徒相互に数学的に考え合うような指導方法の工夫を行った。その結果、生徒は日常生活の中にある確率について興味・関心をもつようになり、生徒自らが数学的に考えて課題を解決しようとするようになった。

#### 1. 研究のねらい

日々の数学の授業においては、教師が例題を解説し、生徒は教師によって与えられた問題を解くという場面が多く見られる。その結果、生徒は数学に取り組む姿勢が受け身となり、高等学校における数学嫌いの増加や理系離れの一因となっていると考えられる。まず、生徒に数学の内容に対して興味・関心をもたせ、主体的に学習に取り組ませることが重要である。そこで、日常生活とかかわりの深い「確率」を題材に、生徒一人一人が課題を見つけ出し、自ら課題を解決していくような課題学習を行い、生徒相互に数学的な思考を高め合う指導方法に関する研究を行う。本研究は、以下のようなねらいとする。

- (1) 日常生活の中から確率に関する課題を生徒自ら発見させ、課題意識を高めるようにする。
- (2) 課題解決に当たって既習事項と関連させながら、生徒一人一人の方法で解決させる。
- (3) 教師の支援や生徒相互の話合いを学習に位置付け、数学的な思考を促す。

#### 2. 研究の内容・方法

##### (1) 教材の研究

生徒の課題学習の成果から、生徒自らの力で解決できるような日常生活の中にある確率の教材について考察する。

##### (2) 授業展開の研究

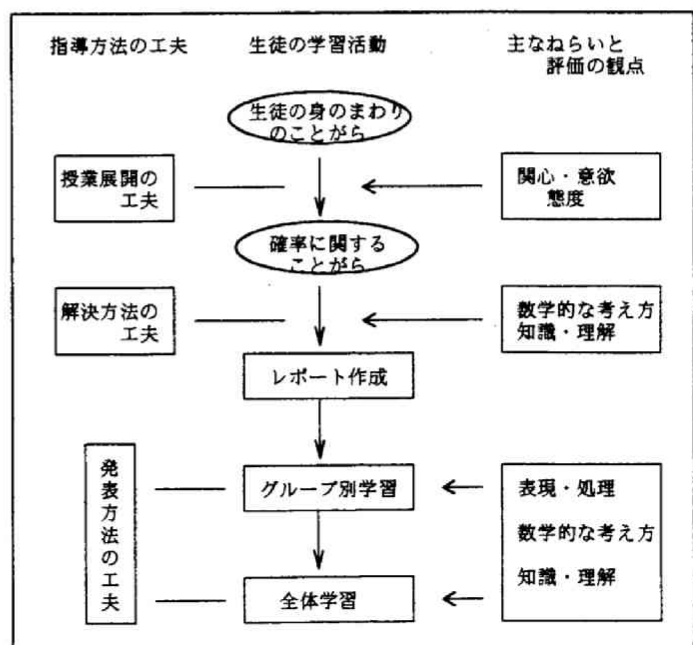
実践授業を通して、生徒一人一人が解決した内容を発表し、相互に話し合うことで数学的な思考を高めるような指導方法について考察する。

##### (3) ワークシートの作成と活用

学習活動の各段階で数学的な思考を促すようなワークシートの作成と活用方法について検討する。

##### (4) 課題学習の方法についての研究

授業後にアンケート調査を行い、生徒の興味・関心や数学的な思考のようすを考察する。



### 3. 指導方法の工夫

#### (1) 課題学習についての工夫

高等学校の段階においても、生徒一人一人の能力や適性、興味・関心などに応じて、日常生活の中から数学に関する課題を見つけ出させることが可能である。また、課題を解決していく過程で学ぶことの楽しさを知り、課題を解決したときの成就感や満足感を味わわせることができる。本研究では、数学的な思考を高めるために、生徒一人一人が日常生活の中から自ら課題を見つけ出し、ワークシートを用いて解決していくような授業実践を行う。

#### (2) 課題設定からレポート作成までの指導方法の工夫

生徒が見つけた課題について、解決の見通しを教師が確認した上で取り組ませる。課題解決の見通しを立てさせるために、課題の内容や解決の方法についての疑問点をワークシートに記入させる。また、教師が生徒一人一人に助言をしながらレポートを作成させる。

#### (3) 生徒の発表方法についての工夫

課題学習の成果について、グループ別に発表する方法（グループ別学習）と生徒全体場で発表する方法（全体学習）の2つがある。グループ別学習では、課題の内容によって確率の基本法則、独立試行、期待値の3つの分野に分類し、生徒の作成したレポートをもとに、グループ内で相互に発表と協議をさせる。また、全体学習では、生徒の作成したレポートの中から、確率に関する発展的な課題を含んだものを取り上げて発表させる。これらの学習を通して、生徒に成就感や達成感を味わわせ、課題を発展させながら数学的な思考を高めることができる。

### 4. 授業実践

#### (1) 指導計画

単元名：「確率」 対象：全日制普通科1学年40名

学習項目	学習内容	時間・期間
確率と基本的な法則	確率の意味や基本的な法則について理解する。	8(時間)
独立な試行と確率	具体例を通して、独立な試行における確率を理解する。	6
期待値とその活用	具体的な事象に即し、簡単な場合の期待値を理解する。	6
課題設定	日常生活の中から確率に関する課題を見出し、解決する見通しを立てる。	1
レポート作成	自ら見出した確率に関する課題についてレポートを作成する。	夏季休業中
グループ別学習	生徒が設定した課題別のグループで発表、討議をする	2
全体学習	代表者の発表をもとに、まとめを行う。	1

#### (2) 評価の観点

(関心・意欲・態度) 日常生活の中から確率に関する課題を見出そうとする。

(知識・理解) 課題を解決するために、確率に関係する既習事項と関連づけて考える。

(表現・処理) 確率に関する課題の内容を数学的に表現し、論理的にまとめて発表する。

(数学的な考え方) 確率に関する課題を解決する過程で数学的な思考を高め、数学的な見方や考え方のよさを知る。



(3) 授業実践

① 課題設定

ねらい：生徒一人一人が日常生活の中から確率に関する課題を見出して、解決への見通しを持つ。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点 (○) および評価の観点 (●)
導入	生徒が日常生活の中から確率に関する課題を見出すように、具体的な事例を紹介する。	具体的な事例や資料を参考にする。	○事前に課題となるような題材を採す。 ●内容に興味関心を持つ。 (関心・意欲・態度)
展開	生徒一人一人が確率に関する課題を見出す。	生徒一人一人が、日常生活の中で興味をもった確率に関する課題をワークシートに記入する。 生徒一人一人が見出した課題をワークシートに記入することで、解決の見通しを立てる。 S1：トランプの役の出る確率 S2：日本シリーズで優勝する確率 S3：宝くじの期待値を求める	●確率に関する課題を積極的に見出そうとする。(関心・意欲・態度) ●身近なことから数学を用いて表現をする。(表現・処理)
まとめ	確率に関する課題について	日常生活の中から確率に関する課題を見出すことができる。	

1. 研究分野 ① 歴史 ② 確率とその基本性質 ③ 独立な試行と確率 ④ 期待値 ⑤ 教材 ⑥ プログラム ⑦ その他

2. 研究テーマを記して下さい。  
両親の血液型から生まれる子供の出現る確率を調べる。

3. 本研究を通して達成したい目標を具体的に書いて下さい。(ポイントを絞って書く)  
どんな血液型の組合わせによって、どんな血液型の子供が生まれてくるか公式などをつかて、わかるようにしたい。

4. なぜ、この研究分野・目標を置いた理由を書いて下さい。(中間報告以上に詳細に正確に書くこと)自分で、いろいろな組合わせを考えた。確率の公式を使って、どいつか、何となく、わかろうとしたのが目的です。

5. 参考文献を全部書いて下さい。(頻りに使った順、最後に読みたい本は○をつける。足りないときは、レポートの最後に同じ要領で書いて下さい。)

① 書名 遺伝 血液型の話 著者名 石山 昌夫  
出版社 丸文社  
参考している章やページ 8 章 263 ページ

② 書名 人の遺伝 著者名 ジェフ・ロビンソン  
出版社 株式会社白水社  
参考している章やページ 6 章 40 ページ

③ 書名 血液型 著者名 山本 茂  
出版社 化学同人  
参考している章やページ 2 章 21 ページ

④ 書名 \_\_\_\_\_ 著者名 \_\_\_\_\_  
出版社 \_\_\_\_\_  
参考している章やページ \_\_\_\_\_ 章 \_\_\_\_\_ ページ

どんなところを工夫したり努力しましたか？  
(一番見て欲しいところ)

わかりやすく、表を書いたところと、  
確率に、計算式をやった。  
(表を見ただけだと、納得しなかった。)

課題学習後、レポートの中で自分にとって、  
初めに発見、感心、感動、気づいた点

血液型というのは A と A の子供だから A というわけ  
ではなく A と O が出たり、その真逆は、AA、  
AO、OO なども、さきまなかなかたがあったことを発見した。  
O は貴重血液型なので、30%の人が O だというのは  
すごいことだと思う。

この課題研究を通して確率について一番興味・関心を  
ひかれた内容は何か？

どんな小さな出来事でも、なにがのかわる「確率」が  
ある。「確率」はなにげないものだけど、人生の中で、  
なくてはならないものだと感じた。

結果・考察・感想  
O型 30%、A型 40%、B型 20%、AB型 10%  
の確率で産まれてくる。

今後の課題

今後から何かしら確率があったらほっとかずに、  
1行でも書いとっておこうと思います。

\*提出は、発表報告書、自己評価表、初階報告書、中間報告書、レポートの順で左とじて、綴じること。

〔課題設定のワークシート〕



## ② 課題の内容例

生徒が見つけた課題の内容について、その一部を記す。

- (a) 確率の基本法則の分野
- サイコロの目の出方を1000回振って出る回数をグラフ化する。
  - 合格可能性から、大学に何校合格するかを考える。
  - 同じ誕生日がいる人の確率は40人のクラスで89.1%になることを確認し、実際に自分のクラスについて調べる。人数を変えると確率はどのように変わるかを考える。
  - 最初にくじを引く場合と2番目にくじを引く場合では、当たりくじを引く確率は同じである。
  - 3番目、4番目……にくじを引く場合はどうなるだろうか、確率の樹形図で考える。
  - 両親の血液型から生まれる子供の血液型を確率的にとらえる。
  - 降水確率の意味と実測統計を調べる。
- (b) 独立試行の確率の分野
- サッカーのペナルティーキックをA、B 2人で3回行い、成功する回数が同じとなる確率を求める。また、回数nを大きくしていったときA、Bそれぞれが勝つ確率を求める。
  - 三角形の形に釘を打たれた台に玉がどのような割合で落ちるか実験する。
  - 10問をでたらめに○、×したとき正解になる確率を求める。問題数を大きくするとどう変わるか考える。
- (c) 期待値の分野
- 今年のサマージャンボ宝くじの期待金額について調べる。
  - 電車やバスの平均待ち時間を確率で考える。
  - 3割バッターが1試合4回打順が回ったとき、安打を打つ可能性を探る。5回の場合、打率を変えたときどうなるかも考える。プロ野球選手に当てはめて調べる。

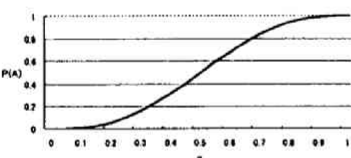
## ③ グループ別学習

グループ別学習では一人一人が課題についての発表を行った後、共通の課題を設定して協議を行った。ここでは3つのグループについてその内容を記す。



〔(ア) トランプの確率についてのグループ〕

	指導内容	学習活動	指導上の留意点 (○) および評価の観点 (●)
導入	確率の基本法則の確認	$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$ $A \cap B = \phi \text{ のとき, } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	
展開	生徒が取り組んだ課題についてそれぞれ発表させる。	<p>S1: ポーカーの確率について。</p> <p>52枚のカードから5枚を選んだときに、ワンペアの出る確率は、</p> $\frac{{}_{13}C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_{12}C_3 \cdot ({}_4C_1)^2}{{}_{52}C_5} = \frac{1098240}{2598960} = 0.42$ <p>他の役についても発表する。</p> <p>S2: ブラックジャックの確率について。</p> <p>S3: トランプ占いの確率について。</p>	<p>● トランプに関する確率を求めることができる。(知識・理解) (表現・処理)</p> <p>● 他人の発表から日常生活の中の確率に関する課題を見出す。(数学的な考え方)</p> <p>● 発表を通して確率の求め方に関する理解を高める。(知識・理解)</p>
	グループごとに課題を設定し協議させる。	<p>ポーカーの確率について、ジョーカーを入れた53枚のカードで考えて見よ。</p> <p>S1: ワンペアの出る確率を求める。 ジョーカーを含むワンペアの出る確率は、</p> $\frac{{}_{13}C_4 \cdot ({}_4C_1)^4}{{}_{53}C_5} = \frac{183040}{2869685}$ <p>ジョーカーを含まないワンペアの出る確率は</p> $\frac{{}_{13}C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_{12}C_3 \cdot ({}_4C_1)^2}{{}_{53}C_5} = \frac{1098240}{2869685}$ <p>これらは互いに排反だから、</p> $\frac{183040}{2869685} + \frac{1098240}{2869685} = \frac{1281280}{2869685} = 0.45$ <p>従って、ジョーカーを入れたほうが確率が大きくなる。</p> <p>S2: ツーペアの確率について。</p> <p>S3: カードを交換するときの考え方について。</p>	<p>○ ポーカーのルールについて確認する。ジョーカーは任意のカードとして利用できる。</p> <p>● 課題に興味を持って意欲的に取り組む。(関心・意欲・態度)</p> <p>● 日常生活の中で、確率を用いて判断しようとする。(数学的な考え方)</p>
まとめ	確率の求め方と利用について	(ワンペアの確率) > (ツーペアの確率) のように、身近なゲームについて確率を求めて判断することができる。	


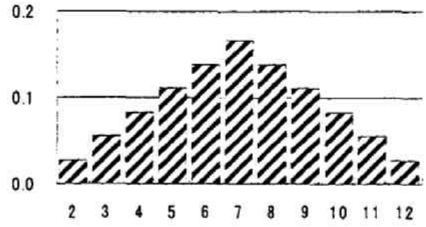
〔(イ) 独立試行についてのグループ〕

	指導内容	学習活動	指導上の留意点 (○) および評価の観点 (●)
導入	独立試行の確率の確認	$P(X=r) = {}_n C_r \cdot p^r (1-p)^{n-r}$	
展開	生徒が取り組んだ課題についてそれぞれ発表させる。	S1: 日本シリーズ(7回戦)の優勝する確率について ・すべての勝敗について確率を求めた。 ・過去のデータを検証して、理論値とほとんど変わらない値に感動した。 S2: 相撲の15日間の勝敗について S3: メジャーリーグの勝敗について	● 独立試行の確率を求めることができる。(知識・理解) ● 発表を通して独立試行に関する理解を高める。(知識・理解) ● 他人の発表から日常生活の中の独立試行に関する課題を見出す。(数学的な考え方)
	グループごとに課題を設定し協議させる。 pの値を変化させるとどうなるか。 	A, Bの2チームが5回戦を行って先に3勝したほうが優勝する場合について、1戦ごとのAの勝率をpとして求めよ。 $P(A) = {}_3 C_0 p^0 (1-p)^3 + {}_3 C_1 p^1 (1-p)^2 + {}_3 C_2 p^2 (1-p)^1 + {}_3 C_3 p^3 (1-p)^0$ $= 6p^3 - 15p^2 + 10p^3$ S1: $p = \frac{1}{2}$ のとき、 $P(A) = \frac{1}{2}$ となることに気づく S2: pが大きくなればP(A)も大きくなる	● 課題に興味を持って意欲的に取り組む。(関心・意欲・態度) ● グラフ電卓で変化の様子を観察できる。(表現・処理) ● pの値が大きくなればP(A)の値が大きくなる。(数学的な考え方)
まとめ	独立試行の考え方のまとめ	日常生活の様々な場面に現れる様々な独立試行の確率を求めることができる。	

〔(ウ) 期待値についてのグループ〕

	指導内容	学習活動	指導上の留意点 (○) および評価の観点 (●)														
導入	期待値の求め方の確認	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>値</td> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_2</math></td> <td><math>x_3</math></td> <td>...</td> <td><math>x_n</math></td> <td>合計</td> </tr> <tr> <td>確率</td> <td><math>p_1</math></td> <td><math>p_2</math></td> <td><math>p_3</math></td> <td>...</td> <td><math>p_n</math></td> <td>1</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">期待値 <math>= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n</math></p>	値	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	合計	確率	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$	1	
値	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	合計											
確率	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$	1											
展開	生徒が取り組んだ課題についてそれぞれ発表させる。 	発表例 S1: 今年のサマージャンボ宝くじの期待値について 確率分布表をつくり、期待値を求める。 $6000万 \times \frac{4}{1000万} + 3500万 \times \frac{8}{1000万} + \dots = 142$ この宝くじを1枚購入するときの期待値は142円で、158円の損となる。 S2: 電車の待ち時間について S3: ゲームの期待値について	● 実際の宝くじから確率分布表を表すことができる。(表現・処理) ● 確率分布表から期待値を求めることができる。(知識・理解) ○ 電卓を用いて全員が計算する。 ● 発表を通して日常生活の場面に期待値を適用する考えを身につける。(数学的な考え方)														
	グループごとに課題を設定し協議させる。 	自分が売る側の立場に立って宝くじをつくり、その期待値を求めよ。 (1枚100円のくじを1000枚発売するものとする) S1: 賞金総額を少なくすれば売る側の利益が多くなることに気づく。 S2: 賞金総額を減らせば期待値が小さくなることに気づく。 確率分布表を完成させ、期待値を求めよ。 <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>賞金</td> <td>本数</td> </tr> <tr> <td>10000円</td> <td>1本</td> </tr> <tr> <td>1000円</td> <td>30本</td> </tr> <tr> <td>200円</td> <td>150本</td> </tr> </table> $10000 \times \frac{1}{1000} + 1000 \times \frac{30}{1000} + 200 \times \frac{150}{1000} = 70$	賞金	本数	10000円	1本	1000円	30本	200円	150本	● 課題に興味を持って意欲的に取り組む。(関心・意欲・態度) ● 売る側にとっての期待値の意味がわかる。(数学的な考え方)						
賞金	本数																
10000円	1本																
1000円	30本																
200円	150本																
まとめ	期待値を利用した考え方のまとめ	期待値は日常生活の場面で損得を数学的に判断するための重要な考えである。	● 期待値の意味を理解して、日常生活の場面に活用しようとする。(数学的な考え方)														

④ 全体学習

	指導内容	学習活動	指導上の留意点 (○) および評価の観点 (●)
導入	代表者に発表させる。	代表者は発表を行う。(下記) 発表内容について、ワークシートに記入する。	●発表の内容に興味をもつ。 (関心・意欲・態度)
展開	質問・協議をさせる。	S1: どのように確率を求めましたか。 S2: 対称性とは何ですか。	
	課題を設定し、考えさせる。  グラフから何が読みとれるか。 期待値を求めさせ、確認させる。 2個のサイコロの目の差についても同じになるか。	サイコロ2個の目の和について確率分布をグラフに表す。  S1: グラフが対称であることに気づく。 S2: グラフの中央の値が期待値になりそうだ。 S1: グラフは対称ではないことに気付く。 S2: グラフの中央の値は期待値ではないことに気付く。	●確率の値を求めることができる。 (知識・理解) ●確率の値を表やグラフを用いて表すことができる。(表現・処理) ●グラフの特徴と期待値の関係を類推できる。(数学的な考え方)
まとめ		グラフが対称のときは、期待値が中央の値であると考えられる。	

課題学習ワークシート3  
う組 豊氏名

1. あなたの課題のタイトルを書きなさい。  
サイコロの確率のしくみ

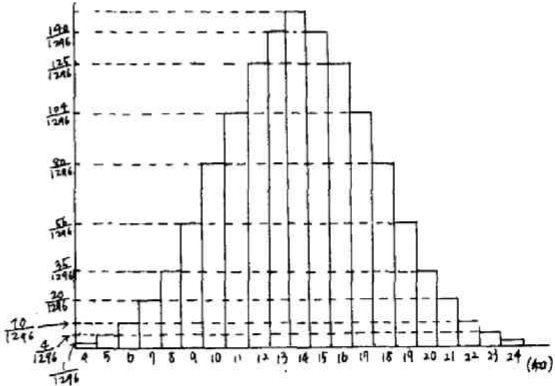
2. レポートの結論を書きなさい。  
サイコロの出た目の数の和の確率は、算中を境に対称になり、サイコロの目はサイコロの数に関係なく成り立つだろうと推察した。

3. 発表内容のまとめを書きなさい。  
1. さいころ 2. 確率方法 3. サイコロの確率 4. 規則性の発見

(i) サイコロを4コ使った場合  
例えば、和が10になる場合(1・3・6)(1・4・5)(2・2・6)(2・3・5)の組合せで、29通りあり。

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	140
1290	1240	1240	1240	1240	1240	1240	1240	1240	1240	1240

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	合計
140	125	104	80	56	35	20	10	4	1	1
1240	1240	1240	1240	1240	1240	1240	1240	1240	1240	1



和の分布の目的は、4コサイコロのサイコロの出た目の数の和の確率を調べ、確認することだ。これは、目録帳や問題集によく目にするこの確率の分布、算中を境に推察した。レポートを作成して、発表で話さなければならぬこと、考えればサイコロの目の数で理解できたのでよかったと思います。

【発表のレジュメ】

## 5. アンケート結果

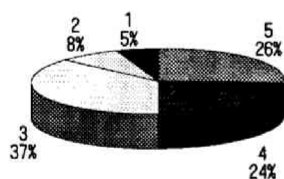
### (1) アンケート集計結果 (対象生徒 40 名)

全体学習の最後に、課題学習についてのアンケート調査を実施した。

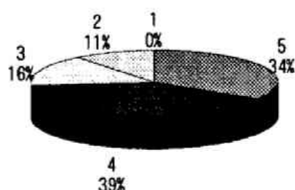
#### ① 下記の 6 項目について、5 段階評価でアンケートを実施した。

(5 : よくできた, 4 : まあまあよくできた, 3 : ふつう, 2 : あまりよくできなかった, 1 : できなかった)

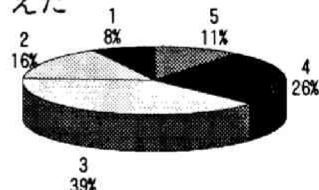
(a) 課題の設定がうまくできた



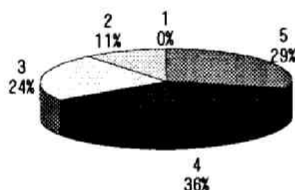
(b) 自分のレポートについてよく理解している



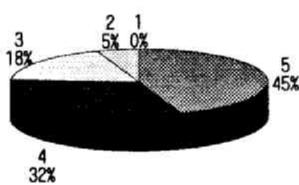
(c) 発表のとき、他人にレポートを理解してもらえた



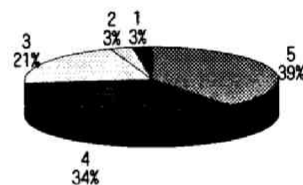
(d) 発表のとき、他人のレポートを理解できた



(e) 授業の内容をよく理解できた



(f) 課題学習を行ってよかった



#### ② アンケートからの考察

(a)から、課題の設定が「よくできた」生徒と「まあまあよくできた」生徒を合わせると全体の半数であった。このことは、課題の設定に当たり生徒一人一人に十分な時間をかけて指導を行ったことによるものと考えられる。しかし、「あまりできなかった」生徒と「できなかった」生徒が13%もいることは、課題の設定の成否がその後の課題学習に大きな影響を与えている。

(b)から、「自分のレポートの内容」の理解について、「よくできた」生徒と「まあまあよくできた」生徒を合わせると全体の4分の3であり、自分のレポートの内容を事前に学んでいたことにより理解を深めることができたと考えられる。また、レポートの内容をよく理解できたのは、自ら課題を見つけ出し主体的に課題を解決したことによるものと考えられる。

(c) (d)から、相互に発表内容の理解が深まったのは、グループ内の人数が6~7人程度の少人数であったこと、3つの課題別にグループ編成を行ったために各生徒が確率に関する課題について視点が共通していたこと、各生徒の発表についてワークシートを用いて評価の視点を事前に与えていたことが、理解を深める要因になったと考えられる。

(e)から、全体学習の内容の理解が「よくできた」生徒と「まあまあよくできた」生徒を合わせると全体の4分の3であった。理解できた生徒が多かったのは、発表した生徒の内容について発展的な課題を含んでいたこと、発表した生徒と聞いていた生徒との間で常に質疑が交わされていたこと、ワークシートを用いて発表内容について評価の観点を明確に与えていたことにより、発表内容に興味・関心が高まり、授業に集中したためと考えられる。

(f)から、課題学習を行ってよかったと思う生徒が全体の4分の3であった。しかし、6%の生徒はあまり好感をもっていないことから、その原因についても検討する必要がある。

## (2) 課題学習についての感想

「授業だけでは身近なことがらにはつながらないと思っていたけれど、レポートをやって自分なりに確率がわかるようになった」という生徒の感想から、今回の課題学習を通して、数学が日常生活とかかわりがあること、生徒にとって既習の内容をまとめるよい機会であったことが伺える。また、「一つのことがらについて研究し、それをグループで協議してみると面白く、確率についての興味や関心がわいてきて楽しかった」という生徒の感想から、自ら課題を設定して追求していくことや相互に学び合うことの大切さを学んだものと考えられる。

## 6. 考 察

### (1) 課題の設定における生徒の活動と教師のかかわりについて

- ① 教師が当初予想していた以上に、生徒自らが日常生活の中から課題を見つけ出していた。興味・関心が高まり面白いという感想をもつ生徒が多かったのは、たとえ同じ分野の課題であっても、生徒一人一人の視点で設定できたことが理由として考えられる。
- ② 課題の設定に当たり、見通しが立たない生徒に対して相談的な支援を行うようにした。一人一人の生徒の興味・関心や意欲を尊重しながら、生徒自身に解決の目標をもたせ、数学的な見方・考え方についての視点を明確にさせることが重要である。

### (2) 課題解決の過程における生徒の活動と教師のかかわりについて

- ① 数学に対して興味・関心が高まり、確率について理解が深まった要因として、課題を解決する過程で既習事項と関連付けるようにしたこと、教科書以外にいろいろな本や資料を参考にしながら、生徒自ら課題解決をさせるようにしたことが考えられる。
- ② 数学的に考えるようになった要因としては、生徒の課題を発展的に考えさせるようにしたこと、グループ別学習や全体学習において数学的な見方・考え方の視点からワークシートを用いて生徒相互に評価させるようにしたことが考えられる。
- ③ 課題学習を充実させるために、特に解決の見通しや手だてについて迷っている生徒への配慮として、教師による個別指導や生徒相互の意見交換をさせる機会を意図的にもつようにすることが重要である。

## 7. 今後の課題

- (1) 生徒の興味・関心や能力、適性などに応じて、教師がある程度の解決の見通しを与えたり、グループで課題の設定を行わせるような課題学習の展開について検討する。
- (2) 確率以外で日常生活の中から生徒自身に見つけ出すことが比較的困難な数学の分野についても、課題学習としてふさわしい教材を開発する。
- (3) 生徒が意欲を持ち続け、自ら解決の見通しをもって数学的な思考が発展できるように、教師のかかわり方や生徒相互の啓発を促すような場面や方法について検討する。
- (4) 生徒が課題をまとめる過程で、課題を数学的に発展させたり、人に分かりやすい表現を工夫したりしていけるように、ワークシート等を活用した評価方法を開発する。



### Ⅲ コンピュータを活用した関数の理解を深める指導と教材の工夫

— 身近な事象から指数についての関数関係を発見する活動を通して —

#### 概 要

生徒が身近な事象の中から関数関係を主体的に探し出し、これらの関数関係のうちで指数の関係になっている事象について、コンピュータを利用して検証していく研究授業を行った。生徒にとって身近な事象を扱ったこと、関数関係を確かめる方法としてコンピュータを利用したことなどにより、生徒の関数に対する興味・関心が高まり理解も深まった。

#### 1. 研究のねらい

一般に関数の学習を難しいと感じる生徒が多く、「関数は嫌い」という声を聞くこともある。それは、関数そのものが抽象的な概念であるため、日常生活からかけ離れたものとして扱うことになり、より理解されにくいものとなっていることが要因の一つと考えられる。

学習指導要領では、「自然現象や社会現象の中に多く見られる生成発展や衰退の様子は指数関数で表されることが多い」と述べられ、「具体的な事例を通して気付かせることも指数関数の理解を深める上において有意義である」とされている。

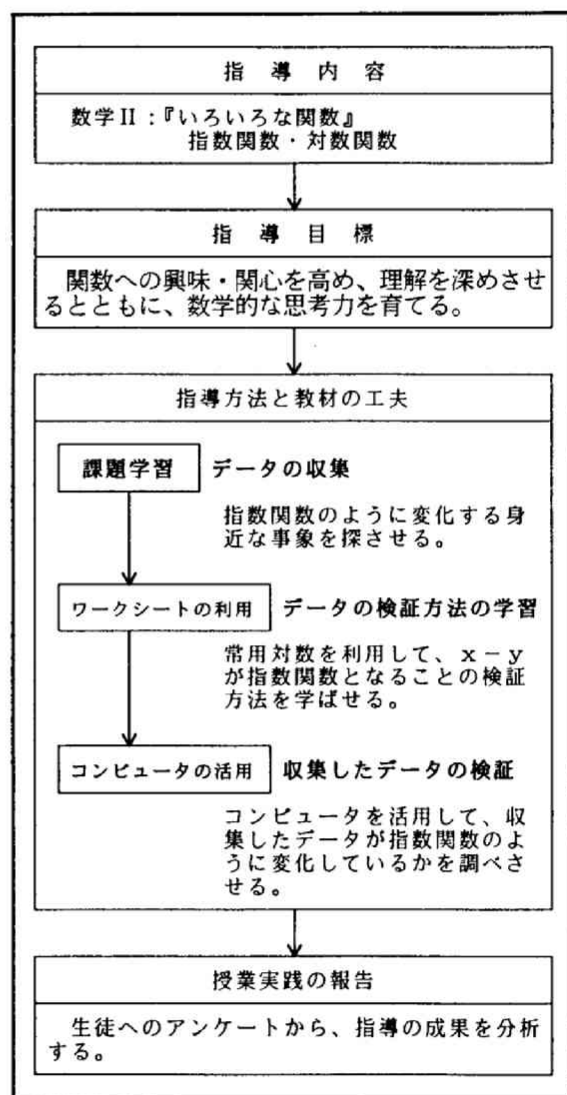
そこで本研究では、数学Ⅱの指数関数・対数関数の学習において、このような点を踏まえ、以下の2点を研究のねらいと考えた。

- (1) 自然現象や社会現象の中に見られる関数関係を題材にすることにより、関数への興味・関心を高め、理解を深めさせることのできる指導方法を工夫する。
- (2) 関数関係があることを、生徒自らが作業を通して確かめることにより、数学的な思考力を育てることのできる教材の開発を行う。

#### 2. 研究の内容・方法

研究のねらいを達成するために、以下のような手順で研究を進めた。

- ① 身近な事象から、指数関数のように変化しているデータを集める。
- ② コンピュータを用いてグラフを視覚的に表せるようなプログラムを開発する。
- ③ 生徒が学習のねらいをつかんで効率よく学習できるワークシートを作成する。
- ④ 授業についてのアンケート調査を行い、分析・考察する。



〔図1：研究の概要と進め方〕



### 3. 指導方法と教材の工夫

研究のねらいに基づき、次のような指導方法及び教材の工夫をした。

#### (1) 課題学習の導入

生徒が日頃から苦手意識を持っている関数への興味・関心を喚起し、生徒の主体的な取組みをねらいとする課題学習を行う。数学Ⅱ「いろいろな関数」の指数関数の学習を終えた2年生を対象として、次のような課題を夏季休業中に与える。

〔課題〕：身近な自然現象や社会現象の中から、指数関数のように変化していると思われるデータを探し、そのグラフを描く。

これは、具体的に以下の2点を指導上のねらいとしたものである。

- ① 主体的にデータを収集させることにより、身近な現象の中に潜む関数関係に興味・関心を抱かせ、その後の学習への動機付けとする。
- ② データをグラフ化しながら関数関係になるものを探し出し、その中から指数関数の特徴を捉えていくことによって、指数関数についての理解を深めさせる。

#### (2) ワークシートの作成

夏季休業中の課題で生徒が探してきたデータが、実際に指数関数のように変化しているかどうかを検証する方法として、次の性質を学ばせる。

〔性質〕：2変数 $x-y$ が指数関数の関係ならば、 $x-\log y$ は1次関数の関係になる。

この性質を具体的な作業を通して理解させるために、ワークシートを作成した(図2)。ワークシートでは指数関数 $y=2^x$ を例として、まず表やグラフから $x-\log y$ の関係を発見させ、次に数式を用いてその関係を導けるように工夫をした。

このワークシートを利用した授業では、以下の2点を指導上のねらいとしている。

- ①  $x-\log y$ の関係を発見させる過程を通して、数学的な思考を促す。
- ② 対数を用いた検証方法の理解を通して、数学的な見方や考え方のよさを認識させる。

常用対数の利用—指数関数のグラフについて考えよう！

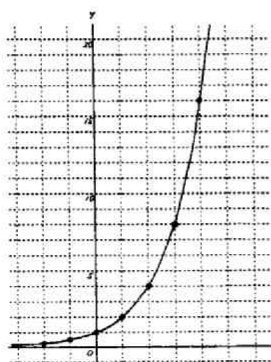
組 番 氏名

例 指数関数  $y=2^x$  をモデルとして考えてみよう。

①  $x-y$ の対応表を完成させなさい。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	...

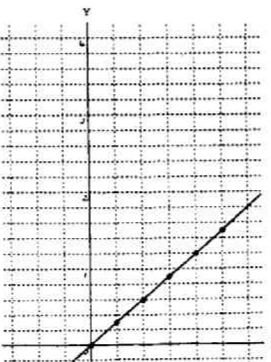
②  $x-y$ グラフをかきなさい。



③  $Y=\log_{10}xy$ として、 $x-Y$ の対応表を完成させなさい。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	...
Y	-0.60206	-0.30103	0	0.30103	0.60206	0.90309	1.20412	1.50515	...

④  $x-Y$ グラフをかきなさい。(Y= $\log_{10}xy$ )



※  $x-y$ グラフと $x-Y$ グラフの関係

例の指数関数について  $y=2^x$

両辺の常用対数をとると  $\log_{10}y = \log_{10}2^x$

$= x \log_{10}2$

ここで、 $Y = \log_{10}xy$ とすると

$Y = x \log_{10}2$

$\log_{10}2 = 0.3010$ より

$Y = 0.3010x$

よって、Yはxの **1次関数** である。

そのグラフは原点を通り、傾きを **0.3010** の **直線** となる。

2変数 $x-y$ が指数関数の関係  
 $\Rightarrow x-Y$ は1次関数の関係  
 (ただし、 $Y = \log_{10}y$ )  
 また、この逆も成り立つことがわかる。

〔図2：ワークシート〕

(3) コンピュータの活用 (簡易ソフトウェアの開発)

夏季休業中の課題学習で探してきたデータが指数関数に近いものであるかどうかについて、(2)で述べた性質に従って、コンピュータ画面で検証できるような簡易ソフトウェアを開発した (使用言語はN88-日本語BASIC)。

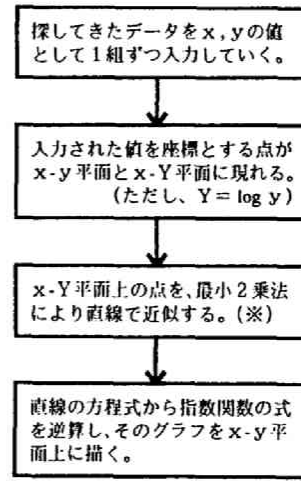
開発の目的は次の2点である。

- ① 生徒が主体的に取り組める体験的な学習を行う。
- ② 検証作業の効率化を図る。

この簡易ソフトウェアの仕組みの概要を図3に示した。授業では、コンピュータを1人に1台を使用させ、このソフトウェアを用いて次の作業をさせる。

- ① 夏季休業中に探してきた各生徒のデータの検証。
- ② データにはない未知の値の推測。

【図3：簡易ソフトウェアの仕組み】



(※)で点がほぼ直線上に並んでいれば、指数関数に近いと考える。

■ 入力練習 (携帯・自動車電話の契約数の推移)

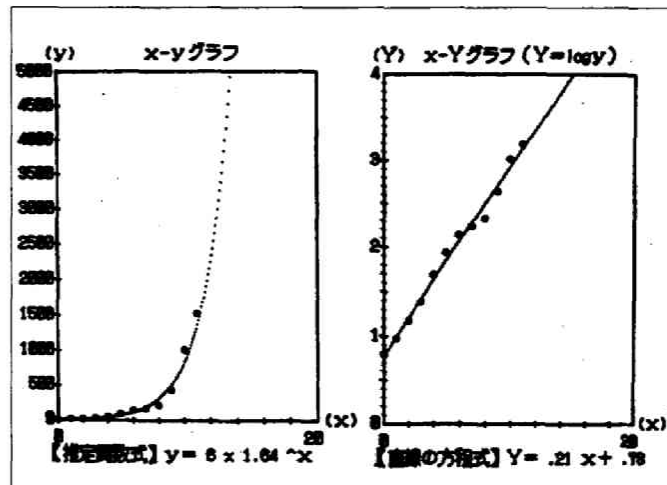
年	契約数 (件)	年	契約数 (件)
平成60年 (x=0)	62103 (y=6.2)	平成3年 (x=6)	1378108 (y=137.8)
61年 (x=1)	96142 (y=9.6)	4年 (x=7)	1712545 (y=171.3)
62年 (x=2)	150798 (y=15.1)	5年 (x=8)	2131367 (y=213.1)
63年 (x=3)	242865 (y=24.3)	6年 (x=9)	4311968 (y=431.2)
平成元年 (x=4)	496558 (y=49.7)	7年 (x=10)	10204023 (y=1020.4)
2年 (x=5)	968278 (y=96.8)	8年 (x=11)	15307967 (y=1530.8)

(※) 郵政省 情報通信統計より

- ① 「x座標の最小値と最大値を入力して下さい」で、最小値に0、最大値に20を入力する。  
(xの値の入力範囲の設定) 「最小値=」0   
「最大値=」20
- ② x, yの値を1組ずつ入力する。  
(データの入力) 「x, y=」0. 6 2   
「x, y=」1. 9 5   
「x, y=」2. 1 5. 1   
「x, y=」3. 2 4. 3   
「x, y=」4. 4 9. 0   
「x, y=」5. 8 6. 8   
「x, y=」6. 1 3 7. 8   
「x, y=」7. 1 7 1. 3   
「x, y=」8. 2 1 3. 1   
「x, y=」9. 4 3 1. 1   
「x, y=」10. 1 0 2 0. 4   
「x, y=」11. 1 5 3 0. 8
- ③ 入力を終了するときは、0.0  と入力する。  
(入力の終了) 「x, y=」0.0
- ④ x-Yグラフ(直線)とx-yグラフ(指数曲線)が描かれる。
- ⑤ [F5]キーを押すと、x-yグラフのy軸のスケールが変更できる。  
([F5]キーを押すことで、y軸の最大値が1000-500-1000-500-10-10-10と変化する)
- ⑥ 画面を印刷したい場合は [F6]キーを押す。
- ⑦ [F5]キーを押すと最初の画面に戻り、別のデータの入力ができる。

【図4：入力練習のプリント】

また、授業の初めにソフトウェアの操作に慣れさせるため、「過去12年間の携帯・自動車電話の契約数」のデータを用いて入力練習をさせる(図4, 図5)。



【図5：簡易ソフトウェアの画面 (図4のデータを入力したもの)】

以上のような指導方法や教材をもとにして、次のような指導計画を立てた。

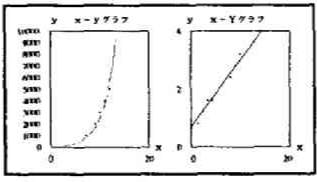
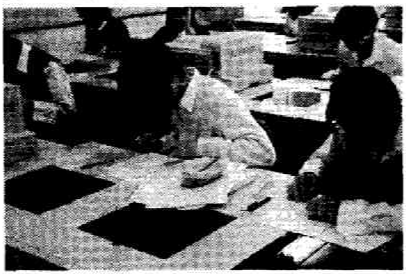
指導計画

- ◇夏季休業中の課題学習 (指数関数の学習の終了時)
  - 身近な事象の中から指数関数のように変化しているデータを探させる。
- ◇第1時間目 (対数関数の学習の終了時) ……普通教室にて
  - 指数関数であるかどうかの確認方法を、ワークシートを利用して理解させる。
- ◇第2時間目 (第1時間目の直後) ……パソコン教室にて
  - 夏季休業中に各自が探してきたデータについて、実際にコンピュータを利用し検証させる。また、データにはない未知の値を計算により推測させる。

#### 4. 指導案 (第2時間目)

##### 《本時の目標》

- ・課題学習で探してきたデータが指数関数のように変化しているものかどうかを、コンピュータを利用して調べる。
- ・プリントアウトされた  $x - \log y$  のグラフから、適当な  $x$  の値に関する  $\log y$  値を読みとり、対数表を利用して  $y$  の値を推測する。

時間	指導内容	学習活動	☆指導上の留意点、★評価
導入 5分	○前回の学習内容を復習する。	一般に、指数関数 $y = a^x$ において、 $Y = \log y$ とおくと、 $x - Y$ 平面上のグラフが直線になることを確認する。	☆夏休みの課題についての総評を簡単に述べる。
展開 40分	○夏休みの課題として提出されたものの中から、1つを例題として取り上げ、その課題が指数関数的に変化しているかどうかを、コンピュータを利用して調べさせる。  プリントアウトされた $x - Y$ 平面上のグラフから、 $x = 12$ (平成9年度)における $y$ の値 (未知の値) を推測させる。  ○自分の提出した夏休みの課題のデータが、指数関数的に変化しているかどうかを、コンピュータを利用して調べさせる。  プリントアウトされた $x - Y$ 平面上のグラフから、未知の $y$ の値を推測させる。  ○時間的に余裕のできた生徒には、用意した別のデータを考察させる。	例題「携帯・自動車電話契約数の推移」のデータを、簡易ソフトウェアの操作方法のプリントに従ってコンピュータに入力し、契約数の伸びがどのように変化しているかを考察する。  グラフをプリントアウトする。  このグラフから、 $x = 12$ における $Y$ の値を読みとり、対数表を利用して $y$ の値を推測する。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"><math display="block">Y \approx 3.35</math><math display="block">\log y = 3.35 = 3 + 0.35</math><math display="block">= \log 10^3 + \log 2.24 \text{ (対数表の利用)}</math><math display="block">= \log (10^3 \times 2.24) = \log 2240</math><math display="block">\therefore y = 2240</math></div> したがって、平成9年度の携帯・自動車電話契約数は約 2240 万件になると推測される。  各自で探してきたデータをコンピュータに入力し、 $x - Y$ 平面上の点がほぼ直線上にあるかどうかを調べる。  適当な $x$ の値に対する $Y$ の値をグラフから読みとり、計算により $y$ の値を求める。(提出用プリントを使用する。)  余裕のある時は、練習問題1、2のデータをコンピュータに入力し、プリントアウトされた $x - Y$ 平面上のグラフから未知の $y$ の値を推測させる。	☆コンピュータの操作方法を説明する。  ★ $x - Y$ 平面上の点の並び方から、契約数の伸びがほぼ指数関数のように変化していることが確認できる。 (知識、理解)  ☆コンピュータが描いたグラフをプリントアウトする方法を説明する。  ☆今後も、 $y$ の値が指数関数のように変化し続けることを前提としていることに留意する。  ★対数表を利用して、 $Y$ の値 (= $\log y$ の値) から $y$ の値を求めることができる。 (数学的な考え方)  ☆実際のデータは、コンピュータで得られた値の 10000 倍になることを注意する。  ☆指数関数と予想されるデータを見つけれなかった生徒には、用意したデータを確認させる。  ★夏休みの課題のデータが、指数関数のように変化しているかどうかを確認することができる。 (表現、処理)  ☆ $x - Y$ 平面上のグラフが直線にならない場合については、別のデータを用意して考察させる。  ★ $x - Y$ 平面上のグラフから、未知の $y$ の値を推測することができる。(数学的な考え方)  ★指数関数のように変化しているかどうかをコンピュータを利用して確認でき、さらに、未知の値を推測できる。 (知識、理解)
まとめ 5分	○身近な事象の中にある関数関係についてまとめる。	$x - y$ の関係が指数関数の関係にあるかどうかは、 $x - Y$ ( $Y = \log y$ ) の関係から判断することができる。未知の値の推測も可能であることを確認する。	☆身近な事象の中にある関数関係はさまざま、中には関数関係を見出せないものも多いことを注意する  ☆他の関数関係になっているものについては、別の検証方法があることについてもふれておく。

## 5. 授業実践

指導計画に基づいて、全日制普通科2年生（数学Ⅱ：習熟度別授業3クラス75名）を対象に研究授業を行った。

### (1) 夏季休業中の課題学習

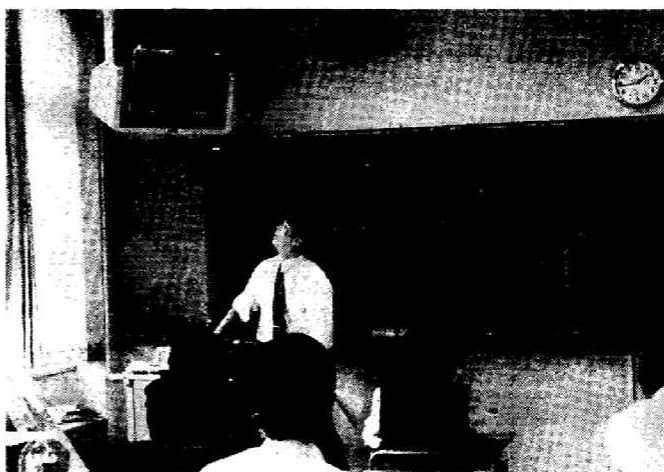
数学Ⅱの指数関数の学習が終了した時点で、身近な事象の中から指数関数のように変化しているデータを探す課題学習をさせた。参考資料として、理科年表から「楽音の周波数」を取り上げ、ド（C）の音について、横軸にピアノの鍵盤の位置、縦軸に周波数をとってグラフ化したものを示した。このため、提出された課題の中には、理科年表を利用して自然現象について調べたものが多かった。提出されたもののうち、2変数が比較的、指数関数の関係に近いと思われるものについて右の表にまとめた(表)。提出した生徒の約7割が、2種類以上の資料を調べるなど、積極的に課題に取り組んでいた。また、指数関数かどうかの判定は、6割の生徒がグラフの形からおおよその判断をしていた。

自然現象について調べたもの (31件)	<ul style="list-style-type: none"> <li>・水の温度に対する蒸気圧の変化</li> <li>・物質の温度に対する溶解度の変化</li> <li>・時間に対する細胞分裂数の変化</li> </ul>
社会現象について調べたもの (8件)	<ul style="list-style-type: none"> <li>・年齢別死亡者数の推移</li> <li>・世界の人口の推移</li> <li>・都民の消費支出の推移</li> <li>・ガンによる死亡者数の推移</li> </ul>

〔表1：夏季休業中の課題の内容〕

### (2) 1時間目「 $x-y$ と $x-\log y$ の関係の確認」の授業

ワークシートを利用して、指数関数 $y=2^x$ の $x-y$ の対応表を作り、グラフを描かせた。また、 $\log y$ の値については、常用対数表を利用して求めさせた後、 $\log 2^n = n \log 2 = 0.3010n$ の関係を確認した。 $x-\log y$ 平面に点をとらせると、生徒は直線になることに驚き、興味深く取り組んでいた。 $x-y$ と $x-\log y$ の関係については、 $y=2^x$ の両辺に常用対数を取り、 $\log y = (\log 2)x$ の式を導く過程を、ワークシートを利用して丁寧に説明した。授業後のアンケートによると、4分の3の生徒が、この関係について「理解できた」または「ほぼ理解できた」ということであった。次に、ワークシートの裏面に用意した $y=3^x$ 、 $y=3^x$ 、 $y=3 \cdot 4^x$ の3題の練習問題を解かせた。初め、 $\log y$ の値の計算に戸惑う生徒も見られたが、その規則性を発見するとスムーズにグラフまで描くことができた。練習問題の解答は、教室にあるモニターを利用して作成した簡易ソフトウェアの画面で確認した。データを入力するとすぐにグラフ表示をする仕組みに、ほとんどの生徒が興味を持って画面に集中していた。



### (3) 2時間目「コンピュータを活用して $x-y$ の関係を検証し、未知の値を推測する」授業

コンピュータの操作方法および簡易ソフトウェアの使用法についての解説を含め、例題として「携帯・自動車電話の契約数」についてのデータを入力させた。初めてコンピュータに触る生徒の戸惑いもあり、計画した以上に時間がかかってしまった。特に、プリントアウトする

際に、プリンタの都合で多くの時間をとられてしまい、1人の教員では十分な巡回指導が行き届かなかった。生徒の感想にも「関数の数値を入力するよりもプリンタを使うことの方が難しかった」というものがあった。データを入力すると、 $x-y$ 、 $x-Y$ 平面上に同時に点を取り、 $x-y$ および $x-Y$ グラフを表示してくれるため、生徒にとって検証が瞬時に確実にでき、興味・関心を持って取り組んでいた。

しかし、今回の方法では、 $x-\log y$  グラフがほぼ直線になった生徒にとっては、 $x-y$ が指数関数に近いものであるという確認ができたが、直線にならなかった生徒にとっては、指数関数ではないということしか確認できない。そこで、このような場合には別の方法で検証する必要がある、生徒への十分な説明ができなかったのが課題である。また、未知数 $x$ の値に対する $y$ の値の推測については、過去のデータからその関数関係を導くことができれば、未知の推測も可能であるということについて、興味を持つ生徒が大変多かった。

コンピューターを利用した「指数関数的に変化するグラフ」の確認

組	番	氏名
---	---	----

コンピューターで作成したグラフのプリントアウトを、適当な形に折り曲げて、この枠に張り付けなさい。

<右側面>

◎課題で見つけてきたグラフの関数関係は、どのようになっていると考えられますか。

指数関数的に変化している。

◎未来の予測をしてみます。今後も、指数関数的に変化すると想定するとき、自分のデータにない $x$ の値を適当に考えて、その時の $Y$ の値を利用し、その $x$ に対応する $y$ の値を求めて下さい。

自分の考えた $x$ の値 =

その時の $Y$ の値 =

$\log y = 1.25$   
 $= 1 + 0.25$   
 $= \log 10 + \log 1.78$   
 $= \log (10 \times 1.78)$

その $x$ に対応する $y$ の値 =

◎今日の授業を通して、何がわかりましたか。

単に「関数のように感じる」という理由だけで思いつくのは、指数関数に似ているので、 $\log$ をとって(指数関数)って、直線になるんがわかりました。

◎時間に余裕のある生徒は、裏の練習問題に挑戦してみてください。

〔図6：提出された課題レポート〕

## 6. 分析と考察

### (1) $x-\log y$ グラフと片対数方眼紙

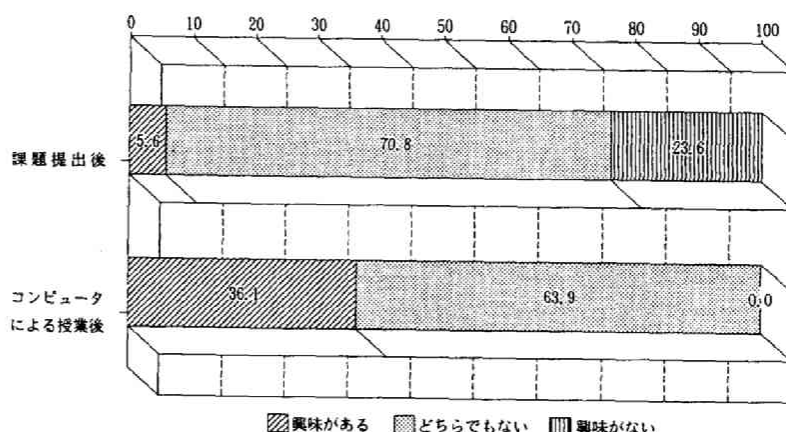
$x-\log y$  グラフは、一般には片対数方眼紙を利用して描かれる。当初はこのグラフ用紙の利用を考えた。しかし、初めて使用する生徒にとっては、 $y$ の値を取るだけで $\log y$ の値を表示できる対数目盛りは扱いにくく、理解を妨げる要因になる。そこで、ワークシートの中では縦軸は $Y = \log y$ とおき、 $Y$ の値を計算させて一般の目盛りにとらせることにした。この結果、授業後のアンケートにも見られるように、 $x-y$ が指数関数のとき、 $x-Y$ ( $Y = \log y$ )は一次関数になるということの理解が容易になったと考えられる。また、結果をコンピュータで表示させることによって、生徒が関心をもって画面に集中し、効果的な場面をつくることができた。



## (2) 関数への興味・関心

課題を提出した直後とコンピュータを活用した授業後の2回にわたり、関数への興味・関心の変化についてアンケート調査を行った(図7)。

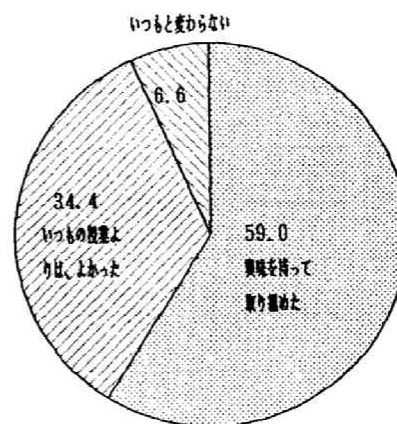
授業の前後で興味・関心の変化が大きいことがわかる。授業前では「関数は難しい」や「関数は好きになれない」などの否定的な感想が目立ったが、授業後では「身近なところで関数を見つけることができ興味をもてる」や「コンピュータによって、数値が具体的にグラフで表されて実感がわいた」などの肯定的な意見も多く見られるようになった。身近な事象を取り上げたこと、自ら探し出したものを検証したこと、そして、コンピュータを活用したことなどにより関数への興味・関心が高まったといえる。



〔図7：関数への興味・関心〕

## (3) コンピュータの活用

今回の授業について9割を越える生徒が、コンピュータを活用した授業について「曲線や直線がきれいでグラフが見やすく関数が理解しやすかった」などの肯定的な感想を持った(図8)。高等学校数学指導資料「指導計画の作成と学習指導の工夫」(平成4年文部省)によれば、コンピュータを活用した指導の目的は、「生徒の学習への関心を高め、理解を助け、思考力を鍛え、創造性を発揮させることにある」としている。今回の授業については、生徒が主体的に取り組む姿勢が見られ、学習への関心が高まったと思われる。また、データが指数関数のように変化しているかどうかを検証するための便利なソフトウェアを開発できたと考えている。



〔図8：コンピュータを活用した授業の感想〕

## 7. まとめと今後の課題

今回の研究では、身近な自然現象や社会現象を題材とする課題学習及びコンピュータを活用する授業により、関数への興味・関心を高めることができた。また、2つの変数の間に関数関係が発見できれば、未知の値の推測も可能であることを実感し、関数についての理解が深まった。これらの経験から、事象を数学的に考察し、数学的な見方や考え方を活用しようとする態度が養われたと考えられる。

今後、指数関数以外の関数についても広く検証ができるように、両対数を用いた検証プログラムの開発やそれを利用した指導方法の研究を進める必要がある。