高等学校

平 成 10 年 度

教育研究員研究報告書

数　　学

東京都教育委員会

主題　学習意欲を高め、事象を数学的に考察し処理する能力をはぐくむ教材や指導方法の工夫

主題設定の理由

高等学校の数学科の目標の一つに、「数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる」ことがあげられている。

しかし、中学校から高等学校へ進むにつれて次第に抽象的な内容が増え、数学が比較的得意な生徒と苦手な生徒に分かれ、数学嫌いが増えていく傾向にあると言われている。

このような傾向を止めるには、生徒が数学に興味・関心をもてるような授業を実践することが必要である。生徒が意欲的に考え、「数学的な見方や考え方のよさ」を理解し、数学を活用しようとするとき、その根底には「なぜだろう？」「不思議だ！」などの数学に対する興味・関心があるからである。

本研究では、生徒が数学の学習に意欲的に取り組むことができる教材の開発と指導方法の工夫に焦点を当て、上記の主題を設定し、実践授業を通して分析・考察を行った。

平成10年度教育研究員（数学）名簿

班	研究テーマ	学校名	氏名
Ⅰ	生徒が数学の内容を「真に理解」するための教材研究と指導法の探究	都立大森高等学校	吉田　弘
		都立広尾高等学校	坂本　憲二
		都立本所工業高等学校	藤田　稔
		都立忠生高等学校	秋山　隆史
Ⅱ	関数の合成による２次関数の導入とタイルを用いた平方完成の指導	都立向丘高等学校	川原　博義
		都立淵江高等学校	中村　博
		都立羽村高等学校	阿久津　和浩
		都立小金井北高等学校	西田　環
		都立保谷高等学校	藤本　公生
Ⅲ	空間図形を認識させる効果的な指導 − VRML２による空間図形の把握 −	都立新宿山吹高等学校	友野　次郎
		都立永福高等学校	大窪　伸幸
		都立日本橋高等学校	堀内　明

担当　教育庁指導部高等学校教育指導課指導主事　若井田　正文

主題　学習意欲を高め、事象を数学的に考察し処理する能力をはぐくむ教材や指導方法の工夫

目　　次

Ⅰ　生徒が数学の内容を「真に理解」するための教材研究と指導法の探求

概　要

『生徒に「視覚化による直観的理解」「論理による理解」「演習による理解の定着」を意図的に働きかけ、生徒が「意味の理解」と「手続きの習得」を結び付けながら学んでいくことによって、生徒の理解が深まる』という仮説に基づいて研究授業を行った。

「視覚化による直観的理解」を図ることによって「論理による理解」も一層深まることは確認できた。数学の真の理解にいたる過程をさらに検証していきたい。

1．研究のねらい

授業をしていると、解法を丸暗記して問題を解く生徒、答えさえあっていれば理解できたとする生徒、反復練習によって理解できたと思い込んでいる生徒など、誤った学び方をしているために数学を苦手としている生徒が見られる。数学の意味を考えないで効率の悪い学習をしている生徒には、数学は機械的で無機質なものとして映るのではないだろうか。

このような生徒には、「手っ取り早く答えを出したい」、「公式や概念の意味を理解するのは面倒だ」という意識があるように思われる。一方、指導者にも、公式や概念の意味を理解することが効率のよい学習につながるという認識が欠けていたのではないだろうか。

しかし、逆に公式や概念の意味を理解しただけではそれらを使えるとは限らない。高校数学は分野ごとに独自な公式、計算方法があり、それらを習得しなければならないからである。

以上のことから、我々は生徒にとって真の理解につながる授業とはどのようなものかを文献を調べ、仮説を立てて実際の授業で考察することにした。

2．研究の内容と方法

(1)　理解に関することを認知科学、学習論、数学教育などの文献、資料で調査・研究する。

(2)　(1)で得られたことをもとに、何をどのように授業に取り入れていけば、生徒の真の理解につながるかを検討し、仮説を立てる。

(3)　仮説をもとに、授業を行い、観察等により分析と考察をしてまとめる。

3．文献研究の結果と研究の仮説

文献研究の結果をまとめると次のようになる。

(1)　生徒自らが、授業内容（学習対象）を、自己の興味・関心やすでにもっている知識（生活経験も含む）・技法と関連付けられることが理解の前提として必要である。

そのためには、生徒がどのようなことに興味・関心をもち、どの程度の学力・知識をもっているかを把握し、それに基づいた授業の工夫をしなければならない。

(2)　意味・内容の理解である「分かる」ということと、手続きの習得である「できる」ということが結び付き、数学の理解を高める。

また、数学の理解に必要な条件として、次の３要素をあげることができる。

① 視覚化（図・モデル）による直観的理解

学習内容と類似した構造をもち、その解決過程と同様な操作・手続きをもった図・モデルによる理解。これによって、抽象的なものが身近に感じられ、イメージしやすくなり、これを用いた説明によって問題の意味や解決の方法が分かりやすくなる。

② 論理による理解

式や文などによる論理的な説明、証明。特に、数学独特の言い回しは生徒にとって理解しにくいので、できる限り日常的なことばで説明する。また、章や節が終了するときに、全体のつながりなどを図式等で系統的にまとめることで、さらに理解しやすくなる。

③ 演習による理解の定着

手続きを習得しやすいように工夫した演習問題、特に、①のモデルを操作することによって答えが得られるような問題を提示することで理解の定着が可能となる。

(3) 生徒への働きかけ

① 公式や概念の意味を理解することが効率のよい学習につながることから、生徒に問題解決の意味や方法をはっきりと言わせ、意味を理解することの重要性を強調する。

② 生徒が主体的・自発的に取り組めるように、作業や実験などができる工夫をしたり、身近で直観的に捉えやすい教材を提示する。

以上(1)～(3)を基に、仮説を次のように設定した。

高校数学を生徒が理解するためには

仮　説

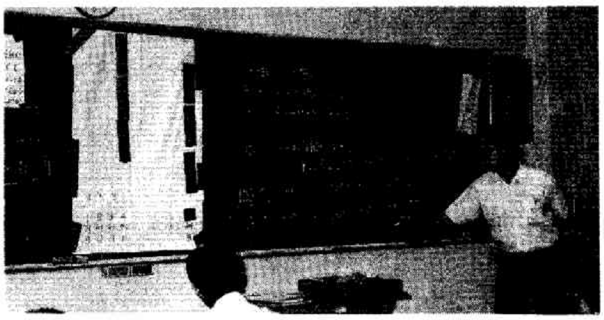
生徒に下の図の(a)、(b)、(c)を意図的に働きかけ、生徒が「意味の理解」と「手続きの習得」を結び付けながら学んでいくことによって、生徒の理解が深まる。

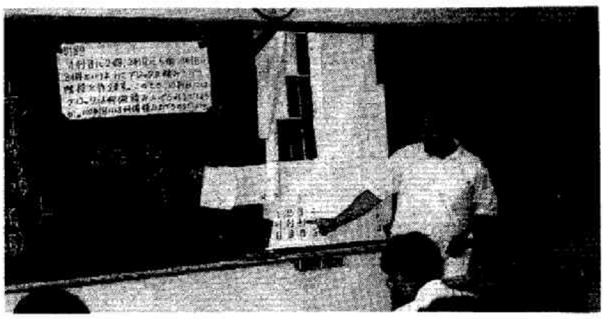
授　業　内　容　の　理　解

意味の理解（ワカル） ←→ 手続きの習得（デキル）

(a)視覚化による直観的理解　(b)論理による理解　(c)演習による理解の定着

前提	生徒自らが、授業内容（学習対象）を、自己の興味・関心やすでにもっている知識（生活経験も含む）・技法と関連付けられること。





4．授業実践

仮説を検証するために、数学Aの等差数列をテーマとして研究授業を行った。

(1) 指導計画

以下に等差数列までの指導計画を示す。

時限	学　習　項　目	時限	学　習　項　目
1	数列とは何か（身近な例をあげる） 数列の規則性を発見させる練習問題	5	等差数列の和（ブロック階段の例を用いて公式を導く）
2	複雑な規則をもつ数列と一般項 練習問題（数列、一般項）	6	等差数列の和に関する基本練習問題
3	等差数列（ブロックの階段の例を用いて一般項を導く） 等差数列の練習問題	7	等差数列の和に関する応用練習問題
4	等差数列の一般項に関する練習問題		

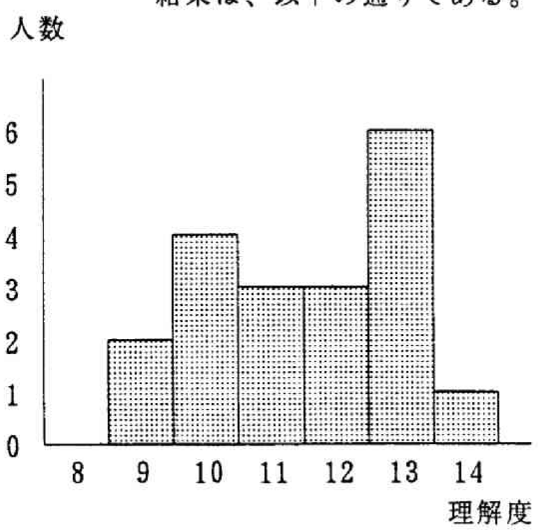
(2) 研究授業

① 授業前の生徒の理解度

数列の導入部分（1, 2時限）について、右のような小テスト（14点満点）を実施した。

前時までの数列の規則について、どの内容が理解できているかを確認した上で本時の内容を指導し、個々の生徒が理解していない内容については、机間巡視などの折りに指導していくことをねらいとしてる。

結果は、以下の通りである。



【数列　小テスト】

1　数列とは何か、説明せよ。

2　次の文の空欄にあてはまることばを書け。

「数列を作っているおのおのの数を（1）といい、1番目の数を（2）、10番目の数を（3）、n 番目の数を（4）という。（4）を n の式で表すことができれば数列のそれぞれの（1）を容易に求めることができ、数列の特徴がわかる。

そのことから（4）を数列の代表として（5）と呼ぶ。」

3　次の数列はどのような規則でつくられているのかを考え、（　）にあてはまる数を求めよ。

(1) 1, 4, (　), 10, 13, ……

(2) 2, (　), −4, −7, −10, ……

(3) 1, (　), 4, 8, 16, ……

(4) 1, 4, (　), 16, 25, ……

4　一般項 a_n が次の式で表される数列の初めの5項を書け

(1) $a_n=3n-1$　　(2) $a_n=2^n$

5　次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) 3, 6, 9, 12, ……　(2) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ldots$

② 研究授業

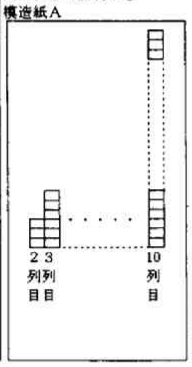
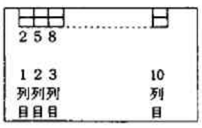
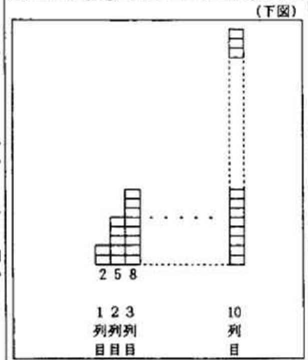
(1)の指導計画のもと、第３時限において研究授業を行った。

対象：全日制普通科１学年（「数学Ａ」２単位）の生徒19名

《本時の目標》　Ⅰ　ブロック階段から等差数列の特徴を視覚的に理解させる。

Ⅱ　論理的思考により、等差数列の一般項の公式を導く。

Ⅲ　演習により、等差数列の理解をさらに深める。

時間	指導内容	学習内容	指導上の留意点
導入 2 分	前時の復習と本時の学習内容の説明	＜発問により＞ 数列に関する用語の確認 （初項、第２項、・・・、第n項、一般項） 数列には規則があるということの確認 一般項の必要性を確認 →板書した数列を指しながら説明 ＜板書＞ $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots$ 初項　第２項　第３項 一般項（第n項）は $\frac{1}{n}$	前時の学習内容を忘れた生徒への配慮 数列の定義や用語に対して視覚的イメージ（板書）を与えることによって自分なりに、より納得するための材料を与える
展開1 5 分	問題提示	＜板書＞ １列目に２個、２列目に５個、３列目に８個というようにブロックを積み上げて階段を作ります。このとき、１０列目にはブロックは何個積み上げられるでしょうか。１００列目には何個積み上げられるでしょうか。」 自由に考えさせる。 机間巡視することで次のような指示を個々に応じて与えていく。 ①手がつかない→図式化（自分なりの表現）させる。 ②図式化だけできている→数列の特徴について考えさせる。 ③１０列目は求まっている。 →２０列目、３０列目を考えさせる。 （再度、特徴を考えさせる。）	問題を把握させる 論理的な思考への手がかりを与える。 一般化させていく。 論理的に処理していく方法を考えさせる
展開2 5 分	発問１ １０列目は何個ですか 発問２ どのように考えましたか 発問３ では、１００列目は何個あるか 発問４ どのように考えましたか	何人かの生徒に答えさせる。 ①正解（２９個）②不正解または答が出ない ↓ ４列目、５列目を答えさせる。↓ 「なぜそうなったのか」を答えさせる。 数列の特徴を考えさせる。 （公差に注目させる。） ①数列を書き出して求めた。②規則を考えて計算で求めた （多いと予想される。） ↓ ２０列目は？３０列目は？ ↓ 書き出して求めるのは大変であることを認識させる。 特徴をさらに考えさせる。 （公差と項数に注目させる ①２９×１０＝290個　②297, 300, 299個など ↓ ５列目は２９÷２？ 特徴を把握しているかの確認 （公差と項数） 生徒の考え方を引き出す。 ①３×１００　②３×９９ ↓　↓ 10列目は３×10？　10列目は３×９？ ↓　↓ 100列目は３×99＋２＝299個になる。	数列の特徴を考えさせることによって論理的な思考の手がかりを与える。 論理的な思考の手がかりを与える。 論理的な思考の手がかりをさらに与える 論理的な思考の必要性を認識させる。 公差と項数の必要性に着目させる。 解決への論理過程の手だてをし解法を導く。
展開3 10 分	図に表して説明する 構造紙Ａ  構造紙Ｂ  		問題を容易にイメージさせる。
	構造紙Ｂをはがし構造紙Ａだけにする 発問５ 何か気がついたことはないか 色の違うマグネットシートを使って３個ずつ増えていることに注目させる	構造紙Ｂを構造紙Ａの上に重ねて黒板に貼る（下図）  	ブロックの数の変化をイメージとして容易にとらえさせるために下の２個を排除する。 公差を視覚的にとらえさせる。
	発問６ １０列目は何個か 発問７ なぜ３×９になるのか 発問８ なぜ構造紙をはがしたのか 発問９ １００列目を求める式は？ 発問１０ n列目を求める式は？	考えさせ、何人かの生徒に答えさせる。 ①正解（２７個）　②３０個 ↓　↓ 式に表すことを考えさせる。　図を再度見させ、列と個数との関係を考えさせる。 考えさせ、何人かの生徒に答えさせる。 ＜板書＞ ２列目→３個　３×１ ３列目→６個　３×２ ４列目→９個　３×３ ・ ・ 10列目→27個　３×９ これに下の２個を加えて ３×９＋２＝２９個 100列目→３×９９＋２＝２９９ n列目→$3\times(n-1)+2=3n-1$ 式の意味を図を用いて再度確認する	公差と項数をイメージづける。 イメージから論理へと結びつける。 初項をイメージづける。 論理的な思考を再確認させる。 一般化することで論理的な思考を深める
展開4 5 分	等差数列とその一般項のまとめ	＜板書＞ ブロックの数を順に並べると、 ２，５，８，・・・ このように前の項に一定の数を加えて作られる数列を等差数列といい、一定の数を公差という。この数列の公差は、３である。 初項a_1、公差dの等差数列$\{a_n\}$の一般項は $a_n=d(n-1)+a_1$である。 式の意味を図を用いて再度確認する。 （ブロックの初項部分をa_1、公差をdとおき、一般項の構造を図を用いて示す。）	公式にすることで論理的な思考を深める 論理とイメージとの関係を結びつける。
展開5 20 分	演習 プリント配布 問１～問４は全員にさせる 問５～問８は早く終わった生徒にさせ、次回の課題とする。	問１　次の等差数列の初項と公差を求めよ。 (1)－８，－５，－２，１，・・・ (2)１０，８，６，４，・・・ 問２　次の等差数列の初めの５項をかけ。 (1)初項５，公差８ (2)初項９，公差－１ 問３　次の等差数列の一般項を求めよ。 (1)８，５，２，・・・ (2)－５，－７，－９，・・・ 問４　次の等差数列の一般項を求めよ。 (1)初項８，公差－３ (2)初項－５，公差－２ 問５　ブロック階段の問題でブロックが９８個積まれるのは何列目か。 問６　次のような等差数列$\{a_n\}$がある。 □，□，□，１４，□，□，□，□，５４ (1)　公差を求めよ。 (2)　初項を求めよ。 (3)　一般項を求めよ。 問７　第１００項が１９５である等差数列を作れ。 問８　今日の学習内容に関する問題を自分で作り答えよ。	問題の把握ができているかの確認 解決には何が必要かという論理的な思考ができているかの確認 論理とイメージとが融合されているかの確認 過去の経験に結びつけることができるかの確認
3 分	まとめ　初項と公差の重要性を強調する	「等差数列は初項と公差がわかれば、数列をすべて書き上げなくても一般項（第何項でも）を求めることができる。」	

③　指導案の改善点

研究授業を実施した後の研究協議の結果、指導案についていくつかの改善点が指摘された。

a_1,	a_2,	a_3,	$\cdots$,	a_n
1,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\cdots$,	$\frac{1}{n}$
初項	第2項	第3項		一般項(第n項)

(ア)　導　入：数列 $\{a_n\}$ と対応させて、板書を右のようにした方がよかった。

(イ)　展開1：自由に考えさせるため、文章だけの問題提示にしたが、どのように考えたらよいのか分からない生徒がいた。2，5，8，…までしか与えていなかったため法則に気が付かなかったこと、等差数列の発見の手立てがなかったことなどが考えられ、第6項まで提示したり、図や模型でイメージさせてもよかった。

(ウ)　展開2：発問1では「3×10＋2」、「3×10」と答えた生徒がいたが、これらの誤答がどのように考えられたか、時間をかけて指導する必要があった。

(エ)　展開3：生徒がイメージによって理解するために一番大切なところであったが、

・模造紙Aにおける10列目のブロックの高さが不正確で考察しにくかった。

・模造紙Bをはがすのが早すぎたため、生徒に十分にイメージさせることができなかった。

・マグネットの色分け、使い方にもっと工夫が必要であった。

・「1列目→0個　3×0」を板書した方がよかった。

(オ)　展開4：・等差数列の説明で「差が等しい」ことを「階段の段差が同じである」ことと結び付ける必要があった。

・図を用いて、数列の値が直線上に増えていく（一般項が1次式になる）ことを確認してもよかった。

・一般項の式が教科書の表記と違うが、内容は同じであることを説明する必要があった。

5．研究授業の分析と考察

(1)　直観的にイメージできる設問

生徒が授業を理解するために、授業内容を「生徒の興味・関心、知識・技法」と関連付けることを前提として、等差数列の一般項を導く指導案を考えることにした。具体的には、生徒の既有の知識で直観的（視覚的）にイメージできる身近なものとして、「ブロックの階段」を素材とした設問を提示した。この設問は、公差をブロックの高さの一定の差として視覚的にとらえることができ、直観的な個数の処理によって、等差数列の和を求めるときにも利用できる。

設問提示では、個々の生徒が自己の既有の知識に関連付けて解決することが望ましいと考え、一様なイメージを与えることを避け、問題には図を取り入れない形式とした。

この設問に対して、

①　ノートに階段を10段目まで書いて求める。

② 2，5，8，………と、個数の変化に注目し、差が一定の「数の列」として捉え、10段目まで「数」をすべて書き並べて求める。

③ 一般項を推測し、その式に代入して第10項を求める。

④ 初項、項数、公差の関係をブロックの階段から読みとり、計算で求める。

など、生徒は自己の既有の知識と関連させ、解決する態度がみられた。

しかし、次の⑤、⑥のような生徒も見られた。

⑤ 「3×10＋2」、「3×10」のように公差と項数を用いて求めようとしているが、確かな解答が得られない。

⑥ 設問の内容は理解しているが、どのようにして求めたらよいか分からない。

このような生徒は、数の変化を初項、項数、公差などの要素でとらえて求めることが容易にできない。他の生徒が考えた方法をヒントとして与えたり、考える手助けとなる発問をするだけでなく、イメージできるモデル・図を提示することが、等差数列の概念のイメージ化と一般項の理解・定着に必要と考える。

(2) 視覚的な直観による概念の把握と論理的な理解

「展開3」では、提示する「ブロックの階段」の図を2枚用意した。（P.5指導案参照）

模造紙A………各列から初段部分（初項）に該当するブロックを除いた図

模造紙B………各列の初段部分（初項）に該当するブロックのみを描いた図

初めは模造紙Aの上に模造紙Bを貼って提示し、設問を視覚的に把握させる。次に模造紙Bをはがし、各列から初段部分（初項）に該当するブロックを切り離す。模造紙Aによって、初段を除いた各列のブロックの個数を3の倍数として求めることができることに気付かせる。次に模造紙Bを再び貼り、初段（初項）を加えることによって、各列のブロックの個数は求められる。このような手順で、イメージによる理解を図った。

しかし、生徒は図によって直観的に理解をしたものの、項数を変数としてとらえる一般項の概念を論理的に理解していない。

そこで、模造紙Aから各項と項数との関係を「2列目→3×1、3列目→3×2」のように提示し、式の特徴を推測・類推させ、「100列目はいくつですか？」という発問によって項数との関係を気付かせ、n項目（一般項）の式を示した。生徒が「第n項は公差の$n-1$倍」を理解するには、「推測・類推」による指導方法が効果あると思われる。

等差数列の概念と一般項を理解させるためには，イメージとの融合が必要であると考え、ブロック階段の図で具体的に初項、公差を示し、一般的な公式の理解には、初項a_1、公差d、項数nをそれぞれ図にあてはめ、論理的に一般項の公式を導いた。

生徒の様子を見ていると、概念や公式を理解させ定着させるためには、『身近なことや関心のある事象のイメージと概念・公式等の融合』を図ることが、新しい知識・概念の理解には必要であると思われる。

(3) 演習による知識・概念の定着

新しい知識・概念が理解されても、それだけでは同様な事象に対処する能力の定着には至らない。確かな定着には、演習を通して「なぜこのようになるか」、「なぜこうした手順でやらなければならないか」という根拠や論理を再度確認することが必要であり、それが

新しい知識・概念を定着・発展させると考える。

したがって、演習には次のような点を考慮した。

① 既有の知識と容易に関連付けられる問題

② 論理的な思考の定着が図られる問題

③ 論理とイメージが融合されている問題

この観点から演習問題を検討し、個々の生徒の理解の度合いに応じた問題を厳選して、指導をしていかなければならないと考える。

6．今後の課題

生徒は、数学の問題を解いたり、公式を理解したりするとき、数学に対して、何かしらのイメージをもつ。

例えば、$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ という式からは、「直角三角形を思い浮かべたり、円を思い浮かべたり」と、生徒独自のいろいろなイメージが存在する。

このイメージをもつための訓練として、教師のもっているイメージの一部を、生徒の発達段階に即して、視覚化して示す必要があると考える。

我々は、「生徒に『視覚化による直観的理解』『論理による理解』『演習による理解の定着』を意図的に働きかけ、生徒が『意味の理解』と『手続きの習得』を結び付けながら学んでいくことによって、生徒の理解が深まる」という仮説に基づいて研究授業を行ってきた。

今回の研究だけでは結論を述べることはできないが、「視覚化による直観的理解」を図ることによって「論理による理解」も一層深まることは確認できたと考える。また、「視覚化による直観的理解」をあらゆる面で有効に活用することで、生徒が自ら新しい発見をする手助けになり、生徒がいろいろなイメージをもてる本当の意味での「学習の定着」が図られると考える。

以上から、今後の第一の課題は、この「視覚化による直観的理解」のために、どのような場面で、どのような内容を提示していけばよいかを、さらに検討していくことである。

第二の課題は、生徒が試行錯誤しながら、「視覚化による直観的理解」、「論理による理解」、「演習による理解の定着」を結びつけ学習していくことで、数学の真の理解につながっていく過程をさらに検証していくことであると考えている。

〔参考文献〕

［1］ 西林克彦「間違いだらけの学習論」新曜社（1994）

［2］ 銀林浩「算数・数学における理解」、佐伯胖編「認知科学選書4『理解とは何か』」東京大学出版（1985）

［3］ 佐伯胖編「すぐれた授業とはなにか（授業の認知科学）」（1989）

［4］ 市川伸一・伊東裕司編著「認知心理学を知る〈第3版〉」ブレーン出版（1996）

［5］ 岩合一男編「算数・数学教育学教職科学講座」福村出版（1990）

Ⅱ　関数の合成による２次関数の導入とタイルを用いた平方完成の指導

概　要

２次関数と１次関数のグラフを合成した関数のグラフは，その２次関数のグラフを平行移動したものであることを認識させ、頂点から x 軸方向への変化量の２乗が y 軸方向への変化量に等しいことによりグラフの方程式を導き出した。そして、２次関数のグラフをかくためには平方完成が必要であることを認識させ、タイルの並べ替えの作業を通して、視覚的に平方完成を理解させる指導を行い、同時に式変形による指導も行った。

その結果、生徒はタイルの作業を行うことによって、平方完成についての興味・関心をもつようになり、理解も高まった。

１．研究のねらい

「数学Ⅰ」の２次関数のグラフについては、$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフが $y = ax^2$ のグラフを平行移動したものであることから、$y = ax^2 + bx + c$ を平方完成することによってグラフをかくという流れで指導されることが多い。その際、平方完成の計算を苦手とする生徒が多く見られる。そこで、タイルを用いた作業を効果的に取り入れることによって、平方完成の式変形に対する生徒の興味・関心を高め、その定着を図ることを目指した。

また、平方完成の必要性を理解させるために、２次関数のグラフの導入において、１次関数と２次関数のグラフの合成を利用することにした。２次関数のグラフは、１次関数のグラフとの合成によって平行移動されたグラフになるという特徴を生徒に理解させ、学習意欲を高めるとともに、平行移動されたグラフの方程式を導くという流れの教材を考え、２次関数のグラフについて新たな視点からの指導方法に関する研究を行うことにした。

２．研究の内容と方法

上記のねらいに基づき以下の内容について、指導方法を研究した。

(1)　平方完成の必要性を理解させること

(2)　２次関数のグラフの導入と展開

(3)　平方完成を習得させること

また、次のような方法で研究を進めた。

(1)　指導計画の作成

(2)　作業教材の開発

(3)　ワークシートの作成と活用

(4)　研究授業の実施

(5)　アンケート調査の実施

３．指導計画

研究のねらいに基づいて作成した指導計画（５時間）の概略を示す。

[第１時]　グラフの合成

①　直線と直線、直線と放物線、直線と双曲線、直線と円のグラフを合成する（作業）。

⇨　放物線だけは、合成しても形に変化がないことを知る。

[第２時]　２次関数の平行移動

①　$y = x^2$ と $y = -2x + 3$ のグラフを合成して $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフをかく。

②　$y = x^2$ と $y = x^2 - 2x + 3$ の対応表を比較する。

③　$y = x^2$ の放物線定規を $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフに重ねる。

⇨　$y = x^2 - 2x + 3$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを平行移動したものであることを知る。

④　対応表より頂点の座標を求める。

[第３時]　２次関数の標準形

①　$y = x^2$ と $y = -2x+3$ のグラフを合成したグラフの標準形を導く。

⇨　$y = x^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフの方程式が $y = (x - p)^2 + q$ であることを知る。

[第４時]　平方完成の習得　（研究授業）

①　タイルを使い、平方完成の式変形を視覚的に理解する（作業）。

[第５時]　$y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかく

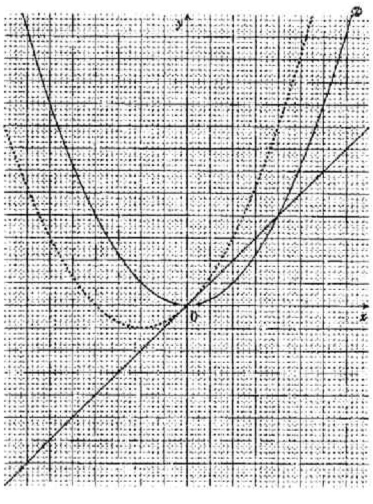
４．教材と指導方法の工夫

(1)　グラフの合成

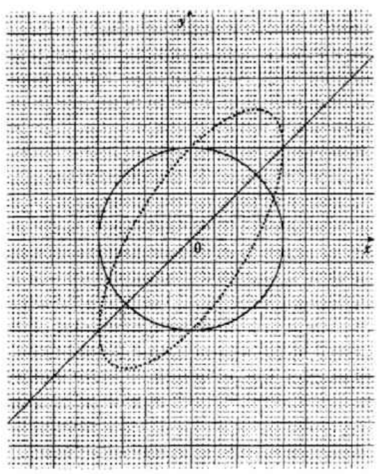
$y = ax^2 + bx + c$ と $y = ax^2$ のグラフの形が一致すること（平行移動）の説明の導入として直線と放物線の合成を考えた。まず、いろいろな図形（グラフ）を合成することによって新しい図形（グラフ）が得られることを、次の作業を通して生徒に体験させる。

①　直線と直線、直線と放物線（図１）、直線と双曲線、直線と円（図２）などの図形をあらかじめ方眼紙に印刷したものをワークシートとして配布する。

〔図１〕



〔図２〕



② 合成の作業はコンパスを用いて、直線のグラフの y の値を他方のグラフの y の値に上乗せしていくという方法をとり、できるだけ丁寧に細かく点をプロットさせる。

この作業のねらいは、直線と放物線のグラフを合成したグラフが放物線となり、しかも形が元の放物線と一致していることに気付かせることにある。

(2) 2次関数の平行移動

放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = bx + c$ のグラフを合成することによって得られる関数が、$y = ax^2 + bx + c$ であることを確認し、そのグラフは、$y = ax^2$ のグラフを平行移動したものであることを生徒に気付かせる。

その方法は以下の通りである。

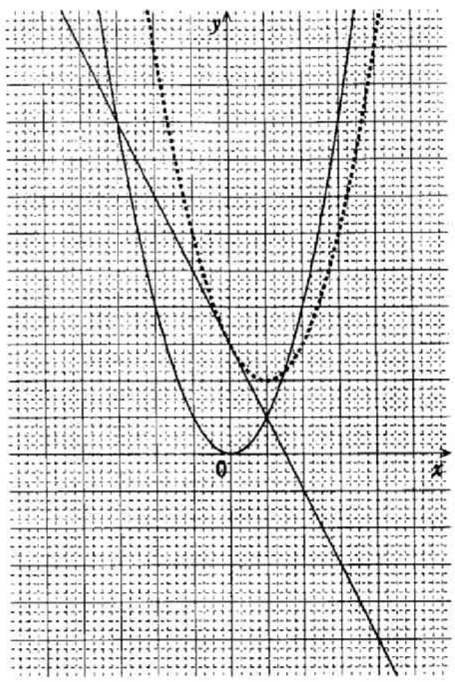
① $y = x^2$ と $y = -2x + 3$ のグラフを合成させる。[図3]

② 対応表を作成する。

ワークシートとして生徒に対応表を配付し〔図4〕, それぞれの平均変化率を計算させる。

平均変化率が一致することで2つのグラフが一致することを確認する。

[図3]



[図4]

x の値	………	-3	-2	-1	0	1	2	3	………
$y = -2x + 3$ の値	………								………
$y = x^2$ の値	………								………
$y = x^2 - 2x + 3$ の値	………								………
$y = x^2$ の平均変化率	………								………
$y = x^2 - 2x + 3$ の平均変化率	………								………

(3) 2次関数の標準形

頂点が (p, q) である放物線の方程式は $y = a(x - p)^2 + q$ であることを導く。

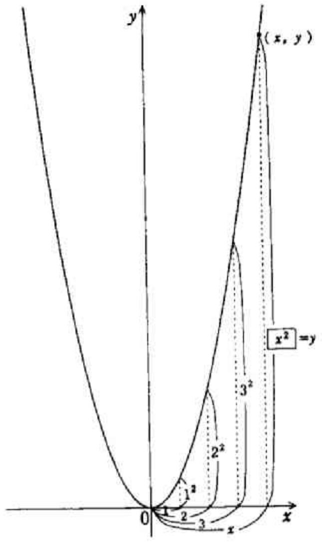
2次関数のグラフは一般形を標準形に変形し、頂点の座標を求めてかくことを説明し、平方完成の必要性を理解させる。その方法は以下の通りである。〔参考文献[1]〕

① $y = x^2$ のグラフを方眼紙に印刷したワークシートを配布し、頂点から x 軸方向への変化量の2乗が y 軸方向への変化量に等しい関係にあることを確認する。[図5]

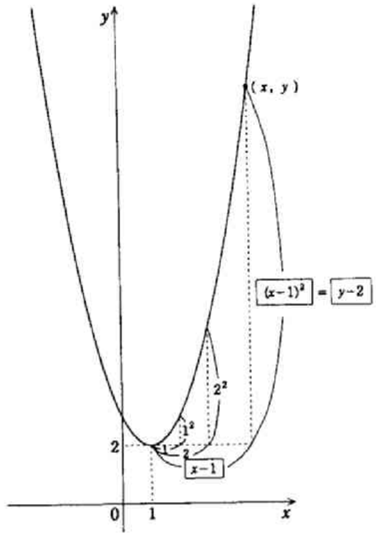
② 放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ を方眼紙に印刷したワークシートを配布し、$y = x^2$ のグラフと形が一致しているのだから、x, y の変化量の関係も同様であることから放物線の標準形 $y = (x - 1)^2 + 2$ を導く。[図6]

③ 標準形を式展開することで一般形と同一であることも確認する。

［図５］



［図６］



(4)　平方完成の習得〔参考文献[2]〕

平方完成の計算手順の説明は、式の展開や因数分解の計算に関連付けて行われることが多い。また、式の変形だけに着目してその手順を公式のように覚えさせてしまうこともある。

そこで特に「xの係数の半分の２乗を加えたり、引いたりする」部分の説明をタイルを用いて視覚に訴えながら、パズル感覚で行うことを考えた。

生徒自身にタイルの並べ替えを行わせ、試行錯誤を繰り返す中で平方完成の式変形の意味を理解させ、計算手順を覚えることができると考えた。

生徒には上質紙で作った次のような３種類のタイルを配布する。

①　長さが縦横xの正方形・・・・・・ 　面積x^2

②　長さが縦x横１の長方形・・・・・ 　面積x

③　長さが縦横１の正方形・・・・・・ 　面積１

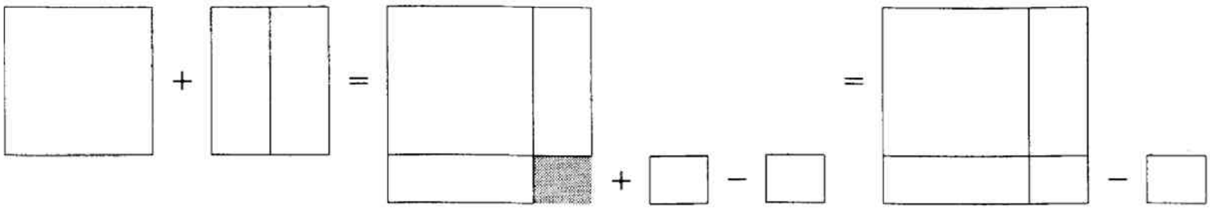
これらのタイルを用いて、例えば面積xのタイルが２枚あれば$2x$というようにタイルの枚数で式の係数を表すことにする。

平方完成における（　　）² はタイルを用いて正方形を作ることであることを作業を通して理解させる。例えば、x^2+2xをタイルで表すと図７のようになる。

これらのタイルを使って正方形を作ることを生徒に考えさせる。正方形にするためには面積１のタイルが１枚不足する。新たに不足分のタイルを加えることになるが、他から借りてくることになるので、「−」をつけて借りてきた分を外に出しておく。〔図７〕

［図７］

$x^2 \quad + \quad 2x \qquad = \quad x^2 + 2x \quad + 1 \quad - 1 \quad = (x+1)^2 \quad - 1$



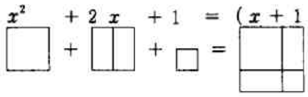
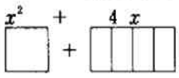
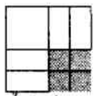
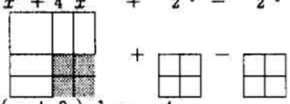
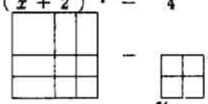
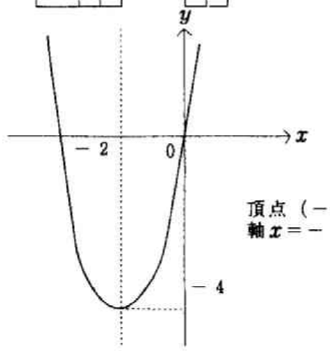
ここで作成された正方形の一辺の長さは $x+1$ となるので、タイルを式で表すと、

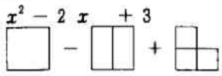
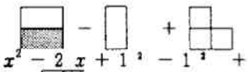
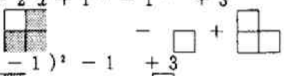
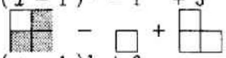
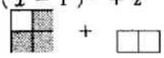
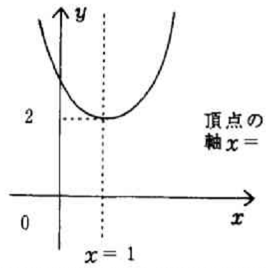
$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ と式変形されたことになる。

５．授業記録

(1) 指導案（第４時間目研究授業）

本時の目標： ① タイルの並べ替えによる正方形化が理解できる。
② タイルの並べ替えと、平方完成の式の変形が同一視できる。
③ 平方完成の式変形が理解できる。

時間	指　導　内　容	学　習　活　動	指導上の留意点・評価
導 入 10 分	・$y=x^2-2x+3$ のグラフは、$y=(x-1)^2+2$ と変形し、頂点の座　標を求めてからかくことを復習する。 ・途中の式変形をタイルを用いて考える。 ・タイルの種類を説明する。（タイルを黒板に貼り付ける） ・$y=x^2+2x+1$ を与えられているタイルで表現する。 ・タイルを並べ替えることによって正方形を作ることを示す。	 $y=x^2 \quad +2x \quad +1 \quad = (x+1)^2$ 	・学習目標が正しく理解できている。 ・用意したタイルを生徒に配布する。 ・用意したタイルは面積それぞれ x^2、x、１であることを説明する。 ・完成した正方形は一辺が $x+1$ の正方形になるので、$x^2+2x+1=(x+1)^2$ と変形できる
展 開 10 分	・$y=x^2+4x$ をタイルで表現する ・タイルを並べ替えて正方形を作る。 ・正方形を作るためにはどのタイルが何枚足りないかを気付かせる。 ・タイルによって標準形が完成した後、頂点の座標・軸の方程式を求めてグラフもかく。	$y=x^2 \quad + \quad 4x$   $=x^2+4x \quad + \quad 2^2 - \quad 2^2$  $=(x+2)^2 - \quad 4$   頂点（－２，－４） 軸 $x=-2$	・生徒に配布してあるタイルで、面積が x^2 のタイルが１枚，面積が x のタイルが４枚用意できたかを確認する。 ・x の係数が正のときは、面積 x^2 のタイルの周りに面積 x のタイルを並べ替えて正方形を作ることを指導する。 ・不足分のタイルを斜線で示し、不足分のタイルを借りてきて貼り付け、借りてきたタイルと同じタイルを「－」を付けて隣に貼り付ける。 　また、何故 2^2 になるかを考させる。 ・斜線部分に、借りてきたタイルを貼り付け、正方形を作り、式で表す。
10 分	・２次関数をタイルを用いて平方完成する問題を解かせる。	＜練習問題＞ タイルを用いて、$y=x^2+6x$ を平方完成し、そのグラフをかきなさい。	・タイルを正方形に並べ替えるためには、x の係数の半分の２乗を加え、加えた分を引いておくということを確認する。

時間	指導内容	学習活動	指導上の留意点・評価
まとめ 10分	・2次関数 $y = x^2 - 2x + 3$ をタイルを使って平方完成するとともに、代数的な方法によって平方完成することを生徒に説明する。	$y = x^2 - 2x \quad + 3$   $= x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 3$  $= (x - 1)^2 - 1 \quad + 3$  $= (x - 1)^2 + 2$   頂点の座標（1，2） 軸 $x = 1$	・斜線部分は存在しない部分 ・x の係数の符号によらず、x の係数の半分の2乗を加えて引くことと、定数項は最後まで使わないことを確認する。
5分	・代数的計算のみで標準形を導く練習問題（次回の授業で解答する）。	・$y = x^2 + 4x + 3$ の頂点の座標，軸の方程式を調べて、グラフをかきなさい。	・タイルでイメージを作ってあるので、代数的に練習をさせる。
5分	次回授業の予告		

(2) 研究授業

上記の指導案に従い、全日制課程普通科第1学年（習熟度別授業「2クラス3展開」実施）の数学を不得意とする生徒16人に対して研究授業を実施した。

以下はその様子や生徒の解答例、参加者からの意見である。

① 導入部分

前時（第3時間目）で学んだように、2次関数の標準形から頂点の座標と軸の方程式を求めてグラフをかく方が、関数を合成したり対応表を作成してグラフをかくよりも効率的であることを復習した。$y = x^2 + 2x + 1$ を例として、タイルによる表現方法と、正方形に並べ替えることによって標準形に変形できる手順を説明した。

② 作業の方法

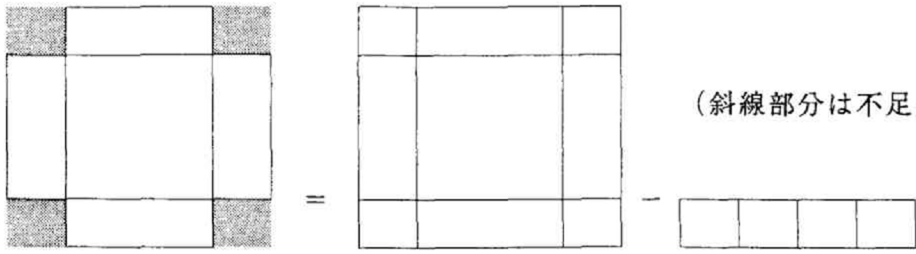
あらかじめ用意しておいた3種類のタイルを生徒に配布し、いくつかの例を示した後、生徒にタイルを並べ替えさせ、並べた結果をノートに貼り付けさせた。また、時間に余裕のある生徒については、タイルを正方形に並べ替える作業に対応する式も書かせた。

③ 生徒の取り組み

具体的にタイルを並べ替えて正方形を作るという作業であったため、生徒は試行錯誤しながらも、パズル感覚で興味をもってタイルの並べ替えの作業に取り組んでいた。習熟度別授業のメリットもあって個別指導を行うことができ、内容が理解できると積極的に作業に取り組む生徒の様子が見られた。

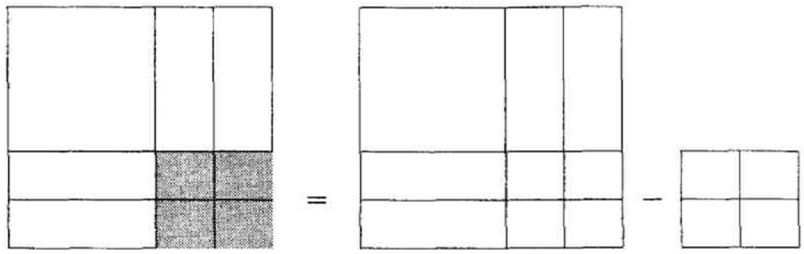
④　生徒の解答　　　　＜例＞　$y = x^2 + 4x$　のタイルの並べ替え

(ア)



（斜線部分は不足分）

(イ)



(ア)のタイルの並べ方は誤りではないが、代数的に平方完成をする際に、「xの係数の半分の２乗を加え、加えた分を引く」という考えを導くために、(イ)のように、タイルの並べ方は正方形の隣り合う２辺に同じ枚数だけ貼り付けることを指導した。

⑤　研究授業の評価

研究授業終了後、各項目について生徒を対象にアンケートを実施した。その結果は次のようである。

項　目	できた	できない
(ア)　２次関数をタイルで表現し、それを正方形にすることは理解できましたか。	80.9%	19.1%
(イ)　$y = x^2 + 4x$ を計算式のみで平方完成することはできましたか。	57.1%	42.9%
(ウ)　$y = x^2 - 2x + 3$ を計算式のみで平方完成することはできましたか。	47.6%	52.4%

６．分析と考察

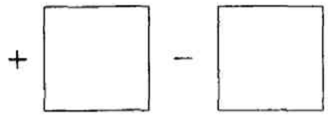
(1)　生徒の興味・関心等について

作業ができるタイルという教具を利用することによって、生徒は試行錯誤しながらもタイルの並べ替えに意欲的に取り組んでいた。これは平方完成の導入の一つとして、タイルという教具が効果的であることを示していると考えられる。

(2)　タイルの並べ替えの作業結果について

誤答ではないが、５(2)④にあるように、正方形の４辺に面積xのタイルを１枚づつ貼り付ける生徒が数名いた。４辺に同数のタイルを貼り付けることができない例として、机間巡視（指導）の中で、「もし面積xのタイルが６枚であったらどうだろう」という質問をし、板書で示すことによって、ほぼ全員が正方形の隣り合う２辺に面積xのタイルを同じ枚数だけ貼り付けるようになった。また、２次関数を表現するのに使用したタイルだけを

用いて正方形に並べ替えようとして、うまくいかなかった生徒が多かったが、図のように面積１のタイルを借りてきて正方形を作り、借りてきた分を返すという指導によって解決された。



このように作業を通して、生徒とのコミュニケーションを密にすることによって、生徒の自発性を促すことができたと考えられる。

(3) タイルを並べ変える作業と代数的な式の表現について

アンケート結果(ア)より、タイルを用いて２次関数の標準形を作ることは大部分の生徒が理解できたと考えられる。したがって、タイルを用いると、標準形から頂点の座標を求め、グラフをかくという一連の流れを生徒に理解させることができると考えられる。

しかし、アンケート結果(イ)(ウ)から分かるように、今回の授業実践では、練習不足などの原因により、タイルを使わずに２次関数の標準形を作ることを十分に理解できなかった生徒もいる。

７．まとめと今後の課題

(1) ２次関数のグラフの導入において、グラフの合成の作業を取り入れた指導を行った結果、次のようなことが分かった。

① いろいろな図形を合成する作業によって、生徒の学習意欲は高まった。

② 生徒は、直線と放物線の合成を通して、２次関数のグラフに興味をもった。

(2) 平行移動後の放物線の式を導く方法において、頂点からの変化量についての特徴を利用することによって、生徒に平方完成の必要性を理解させることができた。

(3) ２次関数の平方完成の指導において、タイルを利用してパズル的に正方形を完成させる指導をした結果、次のようなことが分かった。

① タイルの利用は、平方完成を具体的に視覚化し、正方形を作る作業を通して生徒の自発性を高め、目的に向かって試行錯誤する力を養った。

② 正方形化できた生徒は、２次関数のその後の学習においても積極的な姿勢が見られ、タイルを組み合わせるという作業は、学習活動への動機付けに効果的である。

③ 視覚に訴え、作業を行える教具を利用することは、学習の動機付けに有効である。

今回の研究の成果を生かして、教師の一方通行的な授業ではなく、一人でも多くの生徒が数学に興味・関心をもって主体的に取り組むことができるように、今後、教材の開発や指導法の研究に取り組んでいきたいと考えている。

[参考文献]　［１］　日本数学教育研究（1993年滋賀大会）特集号
［２］　数学教室（1995年３月号　国土社）「べきタイルの代数」

Ⅲ　空間図形を認識させる効果的な指導

——VRML 2による空間図形の把握——

概　要

空間図形の認識能力を高める手段としてのVRML 2の有効性と、授業への応用の仕方を研究した。基本図形（点、線、面、球、柱、錐）を扱いやすいVRML 2の特性を数学に活用する方法を研究した。授業への応用は、主に空間ベクトルを素材として試みた。応用しやすいいくつかのプログラムを作り、生徒が直接VRML 2の操作をすることによって、空間の概念をより身近にとらえさせることができた。

1．研究のねらい

従来、空間のベクトルなどを教えるときには、黒板に表現した図を用いてきたが、生徒が理解するのに難しく、なかなか身近なものとしてとらえることができなかった。BASICプログラムを用いてみても、立体的に提示することは困難であった。最近のパソコンに標準添付されているVRML 2を用いれば、立体図形を簡単に提示できることが分かった。VRML 2をどのように数学の教材として用いれば、生徒が空間の概念をより身近なものとしてとらえることができるかを研究のねらいとした。

2．研究の流れ

VRML 2にはまだまだ体系的なマニュアルが少なく、数学教材を構築するのに参考となるようなマニュアルに至っては皆無である。そこで、プログラムを試行錯誤で組み、どのような図形表示が可能か模索した。その方法を以下に列挙する。

① 文献研究
② サンプルプログラムの実行と分析
③ 座標（x、y、z）の数値入力による図形の確認
④ 基本図形の変形（形・カラー・視点）
⑤ 基本図形の組み合わせ、移動
⑥ ④、⑤の図形が教材として適当かどうかの検討
⑦ VRML 2を活用できる分野の検討
⑧ 授業実践による効果の確認
⑨ エディターとしてのメモ帳の使い方の確認

3．空間図形を表示するソフト『VRML 2』について

(1) VRML 2は、インターネットの閲覧ソフトに組み込んで使うタイプと、単独で使うタイプと大きく分けて2種類のものがある。

(2) インターネットの閲覧ソフトとして有名な2つには、Microsoft Internet Explorer 3.0／4.0 と Netscape Navigator 3.0／4.0 があり、何れもFree Softwear として広く流布している。

(3) この閲覧ソフトに「空間図形」を表示させるために、追加機能として流布しているソフトの1つにVRML 2がある。

(4) 組み込み型ソフトのVRML 2として有名なのは、Microsoft 、SONYなど3つあり、何れもインターネット・サイトから無償ダウンロードできる。

Microsoft site …… http://www.microsoft.com/japan/ie40.asp
SONY site ……… http://vs.sony.co.jp/index-j.html
SGI site ………… http://www.sgi.com/

(5) VRML 2はVirtual Reality Modeling Language という空間図形記述言語で、BASICやFORTRANと同じようなプログラム言語構造を持っている。インターネットや電子メールが機種や環境に依存せず、実行できるのと同様に、VRML 2も機種や環境に依存せず実行できる。

(6) 立体をプログラムで作る際、BASICよりもVRML 2の方が遙かに簡単で分かりやすく作れる。それは、VRML 2が立体提示用に開発された言語であることによる。

(7) VRML 2は立体図形を記述する構造化言語であり、機種に依存しないソースコード・プログラミングになっている。ディレクトリ構成も立体ツリー構造による表記が可能で、効果的なマン・マシン・インターフェイスをもっている。

(8) VRML 2ファイルは、ノード(node)という立体を作る命令群で構成される。
VRML 2のノードには、次のような種類がある。

① 形状ノード　　：球、立方体等の幾何学的形状を表す
② 属性ノード　　：形状ノードの色や模様等の質感を表す
③ グループノード：座標変換を指定したり、複数のノードをグループ化する
④ 特殊なノード　：高原やフォグ、背景の色などを表す

4．授業への導入

VRML 2をどのように授業へ導入するかについての研究を次にまとめる。

(1) 数学B「空間におけるベクトル」の学習への導入

VRML 2の有効性が3次元空間で発揮されることから、空間図形に関する内容への導入が最適と思われる。工夫次第では数学Ⅲでも活用可能と考えるが、ここでは数学B「空間ベクトル」で考えられる活用例を示す。

① 空間座標の導入

例えば点(3，2，1)と点(3，2，5)をVRML 2で表示すると、重なって1点しか見えない。これはVRML 2の視点が最初にz軸方向に設定されているためであるが、マウス操作によって視点を変えると、2点が奥行き方向(z軸方向)に重なっていたことを実感できる。

このようなVRML 2による表示、操作を平面座標から空間座標の導入に利用すると、それまで平面座標に慣れていたものにとって空間座標の必要性や具体的なイメージの確立が容易になる。

② 対称点の理解

座標空間において、原点や座標軸、平面に関して対称な点の座標を求める学習を行う場合、対称点の性質をVRML 2で表示しながら理解を促すことができる。

③ ベクトルの相等

VRML 2の機能の一つに、マウス操作で図形を平行移動させる機能がある。これを用いると、例えば、直方体において、ベクトルをマウスで平行移動しながら重ねる操作を通して、ベクトルの相等を実感させることができる。

④ 内積計算

2つのベクトルの内積の値を求めてから、それらのベクトルの位置関係をVRML 2を用いて表示することで、内積＝0とベクトルの垂直の関係を視覚的に体験させることができる。

⑤ 軌跡・ベクトル方程式の視覚的理解

一定の条件、例えば、定点からの距離が一定の点の軌跡や、2定点からの距離の比が一定な点の軌跡は球面となるが、VRML 2による表示によって条件を満たす点が集まって球になることを画面上で提示することで、空間図形のイメージが具体的になる。

単にベクトル方程式を計算で求めるだけでなく、視覚的に具体化することで理解を促すことができる。

(2) 授業実践

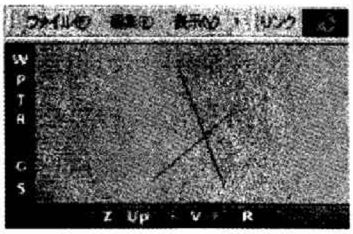
(1)で示したように、VRML 2の特性からは数学Bでの授業実践が望ましかったが、担当者の関係で、BASICによるプログラミングを中心に学習している授業（科目名「数学A」、講座名「基礎数学」）での実践となった。

① 指導案（本時の目標）

・VRML 2を用いて直線の位置関係を見ることにより、空間図形の理解を高める。

・VRML 2のプログラミングの実習

時間	指　導　内　容	学　習　内　容	留　意　点
導入10分	・本時の学習内容の説明 ・発問（問1）	問1　4点A（5,2,-3），B（0,-2,3），C（1,5,0），D（4,-3,1）について、2点A，Bを通る直線と、C，Dを通る直線の位置関係を答えよ。 ・2直線の位置関係 ・平行、交わり、ねじれの位置	・ワークシートへの図示等によって生徒に予想させる。 ・2直線の位置関係は例を提示しながら説明する。 ・全生徒の予想を集計する。
	・ＶＲＭＬ２を用いて問１を視覚的に考察するよう指示する。	・あらかじめ配付されているＶＲＭＬ２のファイルを開く。　⇨ fig1 参考プログラム1	・直線を線分として扱うことに注意する。

時間	指　導　内　容	学　習　内　容	留　意　点
展 開 10 分	・ＶＲＭＬ２のプログラムを変更することで問２を解答させる。  ・問２が早く終わった生徒には課題を指示する。	問２　２点Ａ，Ｂを通る直線と、Ｃ，Ｄを通る直線の位置関係を答えよ。 (1)　Ａ (-6,-5,-3)，Ｂ(4,15,7)， Ｃ (-11,12,-8)，Ｄ(4,-3,7) (2)　Ａ (11,-10,-16)，Ｂ(-1,2,8)， Ｃ (-5,4,10)，Ｄ(13,-2,-14) (3)　Ａ (-6,2,11)，Ｂ(12,-8,-13)， Ｃ (15,-4,-8)，Ｄ(-3,6,16) ・問１のＶＲＭＬ２のプログラムを変更し、上書き保存する。そしてブラウザで開く。 ・課題１　問２の２点が交わる、又は平行であることを厳密に調べるにはどうしたらよいか。	 〈 fig.1 〉 ・全員の解答状況を確認する。 ・課題はファイルとして生徒各自のフォルダにあらかじめ用意しておき、そのファイルに解答させる。
15 分	・次に２直線の位置関係の中で、特に垂直関係について学習することを説明する。 ・発問（問３）  ・ベクトルの内積計算で垂直を調べさせる。	問３　４点Ａ (-4,6,-3)，Ｂ(2,-8,9)， Ｃ (1,-3,-5)，Ｄ(-3,7,9) について、２点Ａ，Ｂを通る直線と、Ｃ，Ｄを通る直線は垂直であるか、答えよ。 ・ＶＲＭＬ２のファイルを開き、視覚的に垂直かどうかを考える。 ・ベクトルの成分計算、内積の計算 ・内積の値から垂直かどうかを求める。	・垂直関係を考える動機付けとして垂直のもつ意味を生徒に考えさせ、その後身近な例を示す。 （ねじれの位置にある２直線の垂直について説明する） ・問３は視覚的には垂直だが、厳密には垂直でない。 ・生徒の答えを集計する。
10 分	・問４を解答させる ・問４が早く終わった生徒には課題を与える。 ・問４の(1)〜(3)のＶＲＭＬ２提示画面を参考に見せる。	問４　２点Ａ，Ｂを通る直線と、Ｃ，Ｄを通る直線は垂直か、答えよ。 (1)　Ａ (-5,6,-3)，Ｂ(2,-8,9)， Ｃ (1,-3,-5)，Ｄ(3,7,9) (2)　Ａ (1,3,5)，Ｂ(4,5,6)， Ｃ (-1,2,8)，Ｄ(2,3,7) (3)　Ａ (-2,5,-3)，Ｂ(1,5,2)， Ｃ (-1,12,8)，Ｄ(4,-3,5) 課題２　４点Ａ (5,2,-3)，Ｂ(0,-2,3)， Ｃ(1,5,0)，Ｄ について、２点Ａ，Ｂを通る直線と、Ｃ，Ｄを通る直線が垂直になるような点Ｄの座標を求めよ。	・ＶＲＭＬ２による提示ではなく、内積計算から答えさせる。 ・成分計算などのヒントを与えながら、全員が解答できるように指導する。 ・全員の解答状況を確認する。 ・課題２の答えは一意に定まらないことを注意する。
まとめ５分	・ＶＲＭＬ２による提示の有効性と限界について説明する。		

② 本時の授業方法について

コンピュータルームの利点を次のように活用した。

・ 生徒がファイル操作するフォルダを教員側サーバ機内のものとし、教員も共有することによって、教員からのファイル供給や生徒の課題提出はすべて1つのフォルダで行う。

・ すべての生徒の画面を教員側コンピュータでモニターチェックすることによって机間指導を効率よく行う。

・ 生徒機のコールボタンが押されたかどうかは、教員モニターで瞬時に把握できることから、挙手の替わりとすることが可能である。

この機能を利用して、全生徒の答えや進度を随時集計し、授業にフィードバックする。

③ 本時の内容について

空間ベクトルは数学Bの内容であるが、本時で取り扱った2直線の位置関係は中学校で既習の内容である。中学校1年で学習する空間図形の内容に、2直線、直線と平面、2平面の位置関係の学習が含まれている。

④ 課題について

課題2は生徒の実態を考慮して、答が一意に定まらないものを出題した。

(3) 授業にVRML 2を導入することについての分析と課題

通常では、コンピュータを授業に取り入れる場合、生徒がソフトウェアの操作方法を習得するためにある程度の時間が必要となる（コンピュータの操作方法についてはあまり問題とならない)。

1時間授業の中で、十数分間コンピュータを利用するために、授業で一度しか利用できないような汎用性の低いソフトウェアの操作習得に何時間かを費やすのは、コンピュータ導入のデメリットといえる。少なくとも同じソフトが何回かの授業の中で計画的、継続的に利用されなければ、コンピュータ導入のメリットは小さいと考える。

これらの観点から今回の研究で取り上げたVRML 2について考えてみる。

まず、現在のコンピュータに標準で添付されていることからVRML 2の入手は容易であり、特別に購入やインストールの必要がない。

また、ソフトの操作については、マウスによる簡単な操作のため数分で習得でき、短時間で授業への導入が可能となる。

プログラムの数値変更を含めたファイル操作については若干の時間を要するが、VRML 2の授業への導入は有効であると考えられる。

さらに、プログラムの構造が理解しやすく、授業で使うプログラムの作成に費やす時間は少なくてすむ。例えば(2)授業実践で利用した参考プログラム1の作成時間は数分である。

以上のように、比較的簡単に扱えるVRML 2ではあるが、シミュレーションなどで複雑なものをプログラミングする場合は準備に時間を要する。この場合は市販のモデラーなどのソフトを必要とするが、数学教材作成への有効性が問題となるであろう。

今後の課題としては、高校数学のどの分野にVRML 2を活用するか、具体的にどの学習内容に活用するかという、教材の選出、プログラミングやモデラーによる教材づくりの方法、生徒が操作しやすい環境をコンピュータ上に作る方法、さらにVRML 2活用の教育的効果の測定など、いくつかの課題がある。

5. 『VRML 2』を数学教材として使っていくための今後の課題と利点

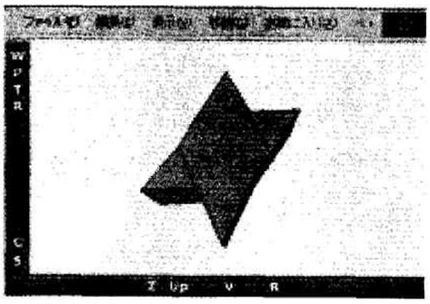
立体を表示するプログラムを作る際、BASICに比べ、作りやすさ、操作性のいずれをとってもVRML 2の方が優れているのは明らかであるが、立体も複雑なものになると、プログラムで作るには直ぐ限界がきてしまう。

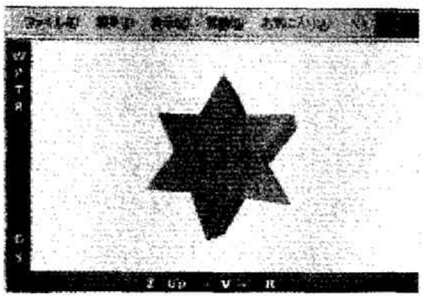
そこで、最近幾つか開発されてきている、VRML 2用のモデラーに期待したい。モデラーは立体を視覚的に構成していくツールで、プログラミングとは性格を異にするが、複雑な立体の構成を容易にしてくれる。

しかし、3次元のモデラーでは、球、直方体、柱といった基本立体の組み合わせによって作る事になるため、別な難しさを要求される。

例えば、星形の立体を作るには、立方体を菱形状に変形したものを3個作り（左図）、平行移動と回転と重ね合わせによってこれら3個を組み合わせ、求める星形（右図）を作るという手順になる。

これは、数学の思考力を要求されることなので、数学教育という観点では、むしろ利点であろう。





〔参考文献〕

①VRML 2　河西朝雄＋河西雄一　ナツメ社

②VRML 2　中山茂　技報堂出版

③VRML 2　21days ／ Chris Marrin & Bruce Cambell

④Graphics World 98年7月号

⑤Software Design 98年5月号

⑥VRML 2　2.0パーフェクトガイド　山本精一　技術評論社

⑦VRML 2　2.0ハンドブック Jed Hartman,Josie Wernecke SiliconGraphics,Inc.

6．プログラム

特徴や記述の仕方など

①テキストファイルである。拡張子を．wrl とする。

② VRML2.0は基本的に、次の５つの要素から構成される。

- ・ヘッダ　#VRML V2.0 utf8
- ・コメント　#で始まる
- ・ノード、フィールド
- ・プロトタイプ
- ・ルート

③ノード名は英大文字から、フィールド名は英小文字から始まる。この区別は注意が必要である。

④ホワイトスペース（スペース、タブ、空白行、など）は無視される。

⑤座標は、手前側がZ軸正方向となる。角度の単位はradianである。

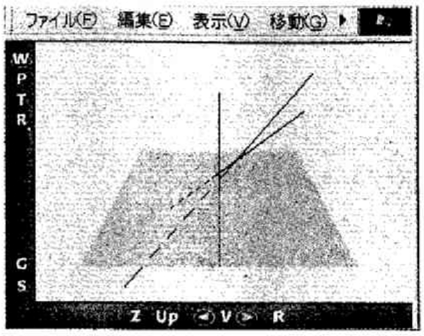
⑥幾何ノードは
Box,Cone,Cylinder,Sphere,Text,PointSet,IndexedLineSet,IndexedFaceSet で形状は限られる
これ以外の形状は、これらを組み合わせることによって作成する。

⑦ＶＲＭＬ２のプログラムは入れ子構造になっているので、実際にプログラムを書くときはノードやフィールドを記述する文字の先頭と括弧をあわせどれが対応しているかわかるように書く。
　ただし、ここで示しているものは紙面の都合上必ずしもそのようになっていない。

prog.1（4頁のfig.1のプログラム）

```
#VRML V2.0 utf8
#空間の２直線
Background {skyColor 0.1 0.9 0.8}
Shape  {
    geometry IndexedLineSet  {
        coord Coordinate {
            point [5 2 -3,0 -2 3,1 5 0,4 -3 1]
        }
              coordIndex [
            0,1,-1,
            2,3,-1,
         ]
        color Color [color [0 0 1,1 0 0]]
        colorIndex[0,1]
        colorPerVertex FALSE
    }
}
```

prog.2（prog.1に軸と平面を追加したもの）

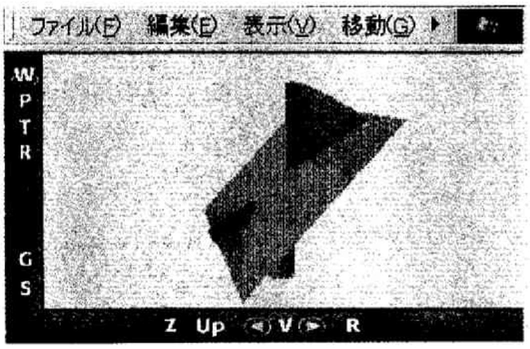



```
#VRML V2.0 utf8
#平面と直線
#視点移動なし
Background {
    skyColor 0.0 0.9 0.9
}

Shape  {
       appearance Appearance {
          material Material  {
            transparency 0.5
            emissiveColor 1 0 1
          }
       }
       geometry IndexedFaceSet {
          coord Coordinate {
             point [ -10 0 -10, -10 0 10, 10 0 10,
                     10 0 -10 ]
          }
         coordIndex [ 0, 1, 2, 3, -1 ]
         solid FALSE
       }
}
Shape  {
       appearance Appearance {
          material Material  {
            diffuseColor 0 1 0
          }
       }
       geometry IndexedLineSet {
          coord Coordinate {
            point [ 0 10 0, 0 -10 0 ]
          }
          coordIndex [ 0, 1 -1 ]
       }
}
Shape  {
       geometry IndexedLineSet  {
            coord Coordinate  {
```

```
      point[10 10 -8,-10 -10 3,6 10 5,-7 -9
          -10]
    }
    coordIndex [0,1,-1,2,3,-1,]
  color Color [color [0 0 1,1 0 0]]
  colorIndex[0,1]
  colorPerVertex FALSE
 }
}
```

prog.3




```
#VRML V2.0 utf8
# 2つの円錐と平面（移動なし）
#視点移動 4 カ所
DEF VIEW-1  Viewpoint {
             description "Viewpoint-1"
             position 0 0 20
             orientation 1 0 0 0
           }
DEF VIEW-2  Viewpoint {
             description "Viewpoint-2"
             position 0 10 20
             orientation 1 0 0 -0.5
           }
DEF VIEW-3  Viewpoint {
             description "Viewpoint-3"
             position 20 0 0
             orientation 0 1 0 1.7
           }
DEF VIEW-4  Viewpoint {
             description "Viewpoint-4"
             position -20 0 0
             orientation 0 1 0 -1.7
           }
Background {
   skyColor 0 0 1
}

 Transform {
      translation 0 -3 0
      children [
Shape {
      appearance Appearance {
         material Material {
            transparency 0.2
            diffuseColor 0 1 0
         }
      }
 geometry Cone [height 7 bottomRadius 4 ]
}
 ]
}
  Transform {
      translation 0 3 0
      rotation 1 0 0 3.14
      children [
       Shape {
        appearance Appearance {
        material Material
        {transparency 0.2   diffuseColor 0 1 0 }
             }
         geometry Cone
          {height 7 bottomRadius 4 ]
          }
    ]
}
Shape {
      appearance Appearance {
         material Material {
            transparency 0.75
            emissiveColor 1 1 0
         }
      }
      geometry IndexedFaceSet {
         coord Coordinate {
          point [ -7 7 -1, 7 7 -1, 7 -7 3, -7 -7 3 ]
         }
          coordIndex [ 0, 1, 2, 3, -1 ]
          solid FALSE
      }
}
```