高等学校

平 成 12 年 度

教育研究員研究報告書

数　　学

東京都教育委員会

主題　数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを活用する態度を育てる教材や指導方法の工夫

主題設定の理由

自ら学ぶ意欲や思考力・判断力・表現力などの資質や能力の育成を重視するこれからの学校教育を目指す高等学校学習指導要領が平成11年３月に告示され、数学科の目標には、「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」との文言が付け加えられた。

数学的活動は今までも、問題解決能力や考える力の育成などの観点から重視されてきたものであり、身近な事象との関連を一層図ったり、自らの思考過程を振り返ったり、見いだした数学的知識を活用したりすることなどを重視し、より活動の目的を明確にしたものである。創造性の基礎としては、基礎的・基本的な知識・技能の習得を基にして多面的にものを見る力や論理的に考える力などととらえ、それらの育成が重要であると考える。

本研究では、数学的活動を通して創造性の基礎を培い、数学的な見方や考え方のよさを認識できる教材、指導方法の工夫に焦点を当て、上記の主題を設定し、検証授業を行い分析した。

教材として、身近な事象や物理などに関連のあるものを取り上げ、学習の際に用いるワークシートを工夫し、指導においては情報機器を活用した。

平成12年度教育研究員（数学）名簿

班	研究テーマ	学校名	氏名
Ⅰ	身近な事象を題材とした２次曲線の探求 －感動を与える授業を求めて－	都立駒場高等学校 都立小石川工業高等学校 都立石神井高等学校 都立多摩高等学校	豊岡　耕一郎 島田　深雪 小川　真一 川井　正樹
Ⅱ	情報機器を効果的に活用した微分法の指導	都立小石川工業高等学校 都立練馬高等学校 都立町田高等学校 都立調布北高等学校	根本　浩太郎 清水　徳子 野間　明 森　一也
Ⅲ	物理との関連を図り、創造性の基礎を培う微分の指導	都立明正高等学校 都立代々木高等学校 都立昭和高等学校 都立五日市高等学校	佐伯　昌俊 田村　薫 浅井　嘉信 中村　克己

担当　指導部高等学校教育指導課指導主事　間瀬　友典

目　　　次

Ⅰ　身近な事象を題材とした２次曲線の探求

－感動を与える授業を求めて－

概　要

数学離れが深刻な問題となっている中で、受け身の学習から発見的な学習をすることにより、生徒たちが数学的なものの見方や考え方のすばらしさを体験できるとともに数学を学習する喜びを感じ、感動できるよう、取り扱いやすく相互の関係も学習できる２次曲線を取り上げた。ワークシートなどを工夫し生徒自ら発見することにより、生徒が興味・関心をもつことができた。

１．研究のねらい

数学離れが深刻な問題となっている。それは、ただ単に公式を用いて問題を解くだけの数学といった印象を生徒がもっているのではないだろうか。数式や理論的な考察を中心とした数学においては生徒の興味・関心を高めることは難しいと考える。

そこで、新しい科目「数学基礎」の目標の達成を図る授業展開として、数式や理論的な考察は最小限に留めて、数学を学習することに興味・関心を高める指導内容・方法の工夫を考えた。

本研究においては、２次関数や反比例関数としてなじみやすい２次曲線を取り上げた。特に生徒が３つの曲線を発見できるよう折り紙やモアレ縞のワークシートなどを工夫したり、興味・関心をもつよう身近な事象や歴史的な背景を紹介したりした。

２．指導方法の工夫

円錐曲線から３つの２次曲線が生まれたことを発見するために、ワイングラスの模型に水を入れ、断面図に現れる図形に注目した。液体を使うことにより傾ける角度の変化によって現れる図形も変化することを体験することができる。

次に、数式を使わずに２次曲線が作図できないかと考えた。定規などを使った作図も試みたが、取り扱いやすさと生徒が興味・関心をもつことができると考え、折り紙とモアレ縞による作図に着目した。この２つの方法とも３つの曲線相互の関係を理解できるように３つ全部を作図することとし、それぞれに１単位時間ずつを充てた。３つの曲線それぞれの幾何学的性質を説明するのにモアレ縞を用いた。また、コンピュータを用いるよさが分かるようにモアレ縞をコンピュータグラフィックスを使って表現し、２次曲線を発見できるようにした。

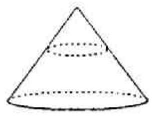
数学的なものの見方やすばらしさを知るには、身近な事象を取り上げることが最も大切である。そこで、２次曲線の性質が利用されている身近な道具の一つである懐中電灯の笠を利用した焦点の性質の実験を行い、導入を行いやすくするため、教材の工夫をした。また、２次曲線の性質を利用した教具として、「パラボラ鏡の幻覚」を用いて、実際に幻の像を見ることにより生徒が感動できる工夫を行った。

３．学習指導案

指導案Ⅰ

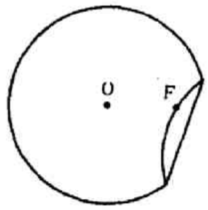
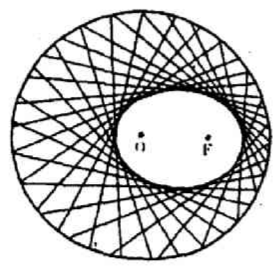
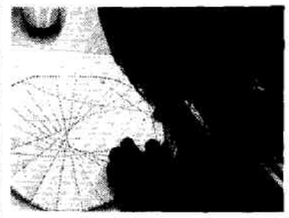
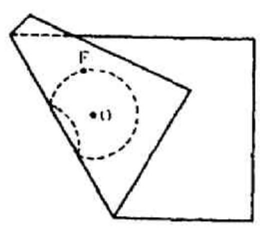
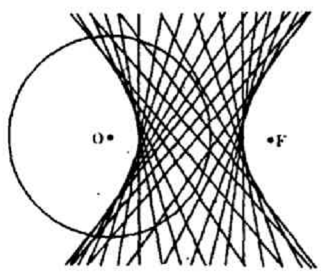
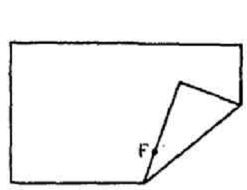
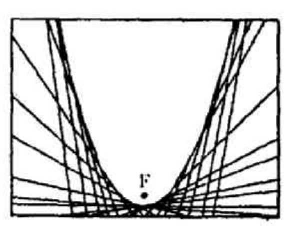
①身近な題材を用いることにより、２次曲線の歴史的背景を知る。

②円錐を使うことにより、３つの２次曲線が相互に関係をもつことを知る。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点
導入	身近な所に２次曲線が隠れていることを示す。	透明な塩ビ板を使って円錐を作り、その中に水を入れて密封する。その模型を傾けると、水の表面の形がどのように変わるか考える。 	
展開	円錐の断面図がどのように変化するか。	円錐を２つにつなげた模型を平面で切ったときの断面図の図形を考える。	断面図は想像しにくいので円錐の模型を用いる。
	放物線、楕円、双曲線の語源とその意味を紹介する。	放物線(parabola)　→丁度良い 楕円(ellipse)　→不足する 双曲線(hyperbola)　→超過する このことから、これらの曲線が円錐を切ることによって、発見されたことを学習する。	プリントを用いて、切る角度と母線の仰角との関係を指摘する。
	放物線の語源から、日常生活との関連について発問する。	parabola→パラボラアンテナ 	
	パソコンの画面で焦点を示す。	パソコンの画面を用いて、３つの曲線の焦点の存在を知る。	本時は、焦点は名前の紹介にとどめて、意味については次に行う。
まとめ		２次曲線が円錐を切ることによって、発見されたこと。共通の性質をもつことに気付く。	

指導案Ⅱ

①前回学んだ2次曲線が、折り紙によって作図できることを実感し、それぞれに焦点と準円(準線)があることを学ぶ。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点
導入	前時までの復習	円錐曲線からできる3つの曲線の名称と概形を確認する。	名称と概形を確認する。
展開	2次曲線の作図		
	①楕円の作図	円形の紙の内部に点Fをとり、円の縁が点Fに重なるように折り、折り目を定規にあてて線を引く。円の縁を少しずつずらしながらこの操作を繰り返す。  	
	②双曲線の作図	円を印刷した長方形のトレーシングペーパーの円外に点Fをとり、楕円の作図と同様な操作をする。  	裏返しても円がわかるようにトレーシングペーパーを使う。
	③放物線の作図	長方形の紙の上に点Fをとり、長方形の一辺を決め、それと点Fが重なるように折り、同様な操作を繰り返す。  	点Fは中央下側にとる。
まとめ	焦点、準円(準線)の存在と位置の確認	点Fと点Oが焦点で、楕円、双曲線の作図に使った円を準円、放物線の作図に使った長方形の一辺を準線という。	幾何学的性質については、ふれない。

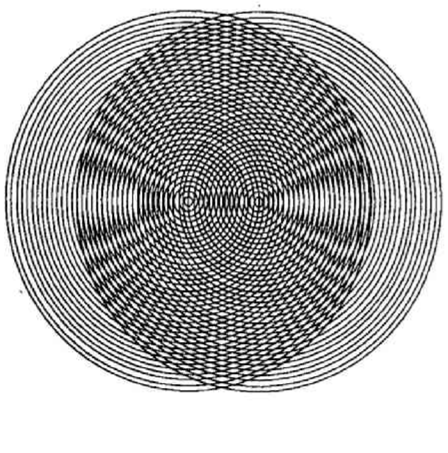
指導案Ⅲ

①モアレ縞を利用して、２次曲線が作れることをワークシートやＣＧを用いて実感でき、できた２次曲線から焦点や準線を見つけ、その幾何学的性質を発見することができる。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点
導入	モアレ縞について	円と円、円と直線など複数の図形を合成した図形であることを知る。	モアレ縞の具体例を示す。
展開1	モアレ縞を利用した２次曲線の作図	ワークシート上のひし形部分を塗りつぶしてつなげる。その図形が、２次曲線になることを発見する。 ワークシート１では楕円と双曲線が、ワークシート２では放物線ができる。	双曲線は左右対称にもう１つ作図する。
展開2	幾何学的性質の発見	各自の作成したワークシート上の目盛りを読みとることにより、幾何学的性質を発見する。 楕円………２つの焦点までの距離の和が一定 双曲線……２つの焦点までの距離の差が一定 放物線……焦点までの距離＝準線までの距離	すぐに発見できない生徒には焦点との関係について発問する。
展開3	ＣＧを利用した２次曲線の発見	画面上にでてくるモアレ縞から、２次曲線が現れることを確認する。	２次曲線を再発見し、CGを使うよさを知る。
まとめ	前時と本時の復習	折り紙やモアレ縞を使って、３つの２次曲線がすべて作れる。	

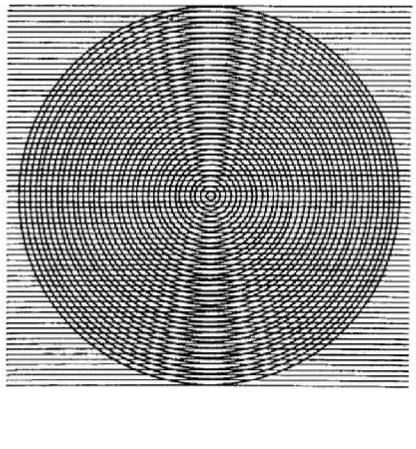
モアレ縞　ワークシート１

２つの円が重なったひし形の部分を塗りつぶして、つなげてみよう。
どんな図形ができるだろうか



モアレ縞　ワークシート２

円と直線が重なったひし形の部分を塗りつぶして、つなげてみよう。
どんな図形ができるだろうか



指導案Ⅳ

①２次曲線の性質が利用されている身近な事象について理解する。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点
導入	前時までの復習	「円錐曲線」「折り紙」「モアレ縞」の授業での２次曲線の性質について確認する。	焦点について、強調する。
展開	実験ビデオを見せ、２次曲線の性質との関係を導く。 実験結果から、焦点の性質を紹介する。	焦点の性質を利用した実験ビデオをみる。 実験結果から、「なぜ燃えたのか」その理由を考える。 実験に使用した教具の「立体断面図」について考える。 ―放物線の焦点の性質― 放物線の内側を鏡と考えると、軸に平行に入ってきた光線は、反射後すべて焦点に集まる。逆に、焦点に光源を置けば、ここから出た光は反射後、平行線となる。	あらかじめ実験したビデオを用意する。 楕円・双曲線についても、同様の性質があることに触れるが、証明はしない。
まとめ	２次曲線が身近な事象に存在していることを理解する。	２次曲線が隠れている身近な事象を考える。 放物線の焦点の性質を利用した教具を見て、２次曲線の性質が実際に使われていることを知る。	数学は、日常生活とは関係ないように思えるが、実は様々な所に利用されていることを強調する。

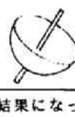
ワークシート

身近にある２次曲線

懐中電灯の笠に太陽光をあて、中心に線香を通すとどうなるのだろうか？

懐中電灯の笠

線香を通す

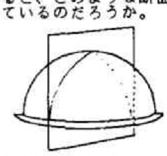


結果を想像してみよう！

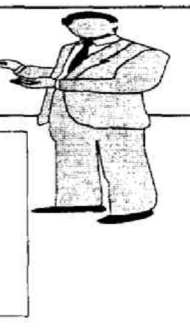
実験結果は

なぜ、このような実験結果になったのか考えてみよう。

懐中電灯の笠の中心を垂直に切ると、どのような断面図になっているのだろうか。



放物線の焦点の性質



他の例）

２次曲線の性質を利用したエピソードは
ずいぶん古くからあるんだ。

アルキメデスは数多くの器械、装置の発明家としても、歴史に名をのこしています。とくに、シラクサのヒエロン王のためにいろいろな兵器、武器を発明したのは有名な話です。そのなかに、巨大な反射鏡を城壁に備え付けて、太陽光線を反射させて、近くまできたローマ軍の艦船を炎上させたという話が伝えられています。この話はもちろん伝説にすぎませんが、アルキメデスの反射鏡の鏡面は放物線の形をしていました。放物線の鏡面は、遠くからきた光をすべてその焦点にあつめ、また焦点におかれた光源から出る光を遠くまで平行光線として反射させることをアルキメデスが証明しました。上の伝説は、このアルキメデスの放物線の原理を象徴するものだったのです。

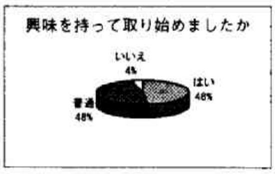
「好きになる数学入門３」より

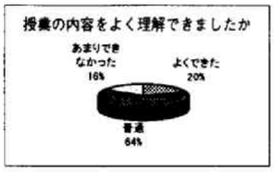
学年	年	番号	番	氏名	

4．研究授業についてのアンケート結果及び分析と考察

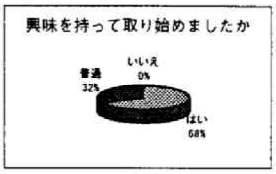
(1) アンケート結果

① 円錐曲線について

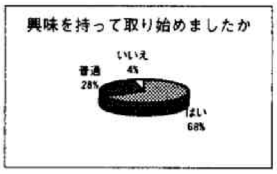


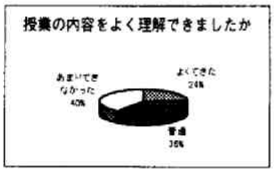


② 折り紙による作図

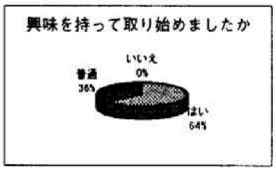


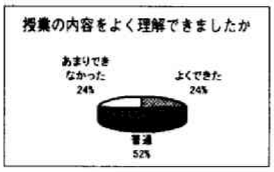
③ モアレ縞による作図





④ 身近な２次曲線





授業の感想

- パソコンを使ったり、塗り絵や折り紙だったので意欲的に取り組めた。
- 今まで切り口とか苦手で全然分からなかったけど、水を使ったことによって少し分かった。
- 直線だけで円を描くのは知っていたが、本当にあんなにきれいにかけるとはビックリした。
- 「遊び」の延長上にある「勉強」としては十分面白かった。もっとも、それが勉強の本来の姿であると、僕は思う。
- ２次関数の話だというので少しいやだったのですが、紙を折ったり、線を引いたりという作業だったので楽しくできた。
- 「日常生活に２次関数なんか使われていない」と思っていたのですが、パラボラアンテナや懐中電灯に使われていて驚きました。

(1) 考察と分析

検証授業として学習指導案ⅠからⅣについて、２時間連続で行った。授業前には予想もしなかった生徒の反応や我々にとっても新たな発見を得ることができた。指導案ⅠからⅣの順に考察と分析をする。

Ⅰ．ワイングラスから断面図を書き取る作業では見る角度が分かりづらいようであった。最後にもう一度見る機会があれば再度確認ができたであろう。円錐曲線の切り口で母線と切断面の仰角の大小によって３つの２次曲線が発見されたことについては、新たな言葉を知り興味をもったようである。特に語源については興味深い様子であった。しかし、放物線を利用した最も身近な例と考えたパラボラアンテナを知らない生徒が４分の１ほどいたことは予想外であった。また、円錐曲線のモデルを用いた焦点と準線についての説明は、生徒が理解するには難しい内容であると思われた。焦点および準線の取り扱いについては、円錐曲線での理解は避けた方がよさそうだと感じた。内接球を用いた模型での紹介程度に留める方がよいであろう。

Ⅱ．楕円の作業では、細かく折っていく生徒もいてかなりの時間が必要であった。点Ｏと点Ｆの距離が近く、円と思ってしまう生徒が多く見られた。焦点間距離の変化による図形の違いを見るのも興味深い。これは、焦点間の距離を遠ざけることが円錐曲線における切断面の仰

角を傾けていくことに等しく、準円の存在やこの作図方法では放物線が描けないことなどさまざまな内容を含んでいることを再認識した。

Ⅲ．ワークシートで、ひし形部分を連続的に塗りつぶす作業では、生徒はスムーズに行えた。ここでもⅡと同様に自由に出発点を取り作業したために楕円と円の区別がしづらい生徒が多く見られた。出発点の位置を何種類かに分けて作業すると変化がわかりやすい。幾何学的性質については、関係式が成り立っていることを何箇所かを使って示した。ワークシートを用いて塗りつぶしたために、実際の２次曲線上の点を結んだわけではないので注意が必要である。ＣＧアニメーションを利用し、直線束幅の変化や焦点距離の変化などで現れる２次曲線の変化を見る際にモアレを見て目が回る生徒も出るので注意したい。

Ⅳ．検証授業では、実際に日常生活などで利用されているものとしては焦点の利用をビデオを見る程度であった。

５．まとめと今後の課題

楕円、放物線、双曲線の３つの２次曲線はこれまでも数学Ｃなどで扱われてきたが、この３つの関係についてはあまり取り上げられていなかったと思う。その理由は、高校で扱う内容としてはやや難易度が高い内容であるからではないだろうか。実際に生徒に分かり易く幾何学的性質を導くところなどはかなり難しいと感じた。今回は円錐曲線、折り紙、モアレ縞と３つの作業の中で３つの曲線を取り扱ってきたが、研究を進める中でこの３つの作業の関連などの新たな発見も得られた。特に、焦点間の距離と準円との関係から、楕円から双曲線への変化を教材として取り上げることや、作業から発見へと進んでいったが、さらに数学的理論づけまで考察を深めることが今後の課題である。

アンケートの結果から、実験・作業を取り入れた授業は概ね好評であった。数学離れが増えている現在、このような身近な事象を取り上げ、外的な活動(観察・操作・実験・実習)からアプローチをすることは、生徒にとっても新鮮であったと思われる。実際に授業を行ってみても、「もっとやって欲しい」「週に１回ぐらいはやってもいい」などの感想が得られた。また、日常生活の中で実際に利用されているものを体験する中で、歓声や驚きの声も上がっている。数学の楽しさやよさを理解するアプローチとしては、効果的であったと思う。

新科目「数学基礎」の目的である、数学への興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、活用する態度を育むというねらいは達せられたのではないかと思われる。そして、「数学基礎」という授業に新たな可能性を見出せるのではないかと期待させるものであった。

［参考文献］

1．「楽しくわかる数学１００時間上」　編著　黒田俊郎・小林　昭　あゆみ出版(1990)

2．「好きになる数学入門」　著者　宇沢弘文　岩波書店　(1999)

3．「幾何のたびじ」　著者　江藤邦彦・小沢健一・黒田俊郎　三省堂　(1979)

4．「幾何の発想」　著者　矢野健太郎　朝日出版社(1966)

5．「数学科教育内容と指導法の開発研究」より　筑波大学数学教育学研究室(1999)

「モアレ縞を用いた２次曲線の探求」筑波大学修士課程教育研究科　野口和久

Ⅱ　情報機器を効果的に活用した微分法の指導

概　要

数学Ⅱ「微分の考え方」の指導において、生徒が情報機器を効果的に活用し、導関数の意義を主体的かつ発見的に学習でき、創造性の基礎を培うための指導を行った。授業後、生徒は、導関数の変化の様子を直観的に把握し、もとの関数の増減との関係に興味・関心を示し導関数の必然性を理解できた。今後、生徒の情報機器操作の習熟の差に応じた指導法の工夫を図ることが課題である。

1．研究のねらい

学習指導要領が平成11年３月に告示され、高等学校については平成12年度からの移行措置を経て、平成15年度から学年進行で実施される。その数学科の目標には、現学習指導要領の内容に、新たに「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」という記述が加えられた。ここでいう数学的活動とは、直観、類推、帰納、演繹などの内的活動及び観察、操作、実験・実習などの外的活動を指す。また、各科目にわたる内容の取り扱いに当たっての配慮すべき事項として「必要に応じて、コンピュータや情報通信ネットワークなどを適切に活用し、学習効果を高めるようにする」とある。このような観点から、外的活動における教具としてコンピュータなどの情報機器を積極的に利用し、さらに内的活動である思考を通し生徒が主体的に学習活動を行うことにより自ら課題を発見し解決しようとする創造性の基礎を培うための指導方法及び教材の工夫を試みた。数学Ⅱにおける「微分の考え方」の一般的な学習内容では、平均変化率、微分係数、微分係数と接線の傾き、導関数の定義、導関数の計算、導関数の応用へと展開される。しかし、現状の生徒の学習では、導関数の計算の学習活動が主になり、なぜ導関数を考えなければならないのかという意義や意味について、具体的なイメージをもちながら学習ができていない状況にあると考えられる。そこで本研究では、情報機器、ネットワーク通信環境を効果的に活用し、次の点をねらいとした。

(1)　変数とその微分係数の間に関数関係があり、それらが関数として表現されることを主体的に学習する。
(2)　微分係数の図形的な意味である接線の傾きの変化の様子から関数の増減を予測する。
(3)　導関数の符号の変化が関数の増減を表すことを発見し、その理由を考察する。

2．研究の内容・方法

上記、研究のねらいを意図し、以下の手順により研究を進めた。

(1)　数学の授業における情報機器利用に関するアンケートを数学科教員と生徒に行う。
(2)　(1)のアンケート集計結果から問題点を分析・考察する。
(3)　数学Ⅱ「微分の考え方」に関する現行教科書における指導方法を分析する。
(4)　効果的な情報機器の選択と効果的な活用場面の設定を考察する。
(5)　指導計画、学習指導案、ワークシート、評価問題を作成する。

(6) (5)で作成した学習指導案に基づき検証授業を行う。

(7) 検証授業後に(5)で作成した評価問題を行い、学習内容の理解度について調査し、その結果から検証授業を考察・分析する。

3．アンケート及び教科書の指導方法における問題点の分析

都立高等学校全日制課程８校、定時制課程２校で、以下のアンケートを実施した。

(1) アンケートの概要

Ｑ１　情報機器を利用した数学の授業を行ったことがあるか（受けたことがあるか）

Ｑ２　Ｑ１で「ある」と答えた場合の分野、形態についての記述

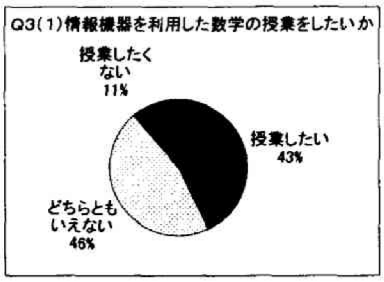
Ｑ３　今後情報機器を活用した授業を行ってみたいか（受けてみたいか）またその理由

(2) 教員アンケート集計結果の分析

Ｑ３「情報機器を使った授業をしてみたいか」という問いに対しての回答と、その理由をまとめると次のようになった。

[情報機器を使うことのメリット]

・視覚に訴えることで生徒が理解しやすくなる。
・板書での限界を助け、時間的にも短縮を図れる。
・計算時間の短縮により理論的な分野に時間をかけられる。
・動き、直感的な場面での把握を助けることができる。
・生徒が興味・関心をもって授業に取り組むことができる。



[情報機器を使うことのデメリット]

・時間的な余裕がない。(教材作成に時間がかかる。教室移動が大変。)
・ハード、ソフト面においての環境が整っていない。(使える適切なソフトウエアが少ない。ＰＣ教室が自由に使えない。)
・教員一人で授業を展開するのは無理。トラブルの対応に追われてしまう。

以上から、利用したいと答えた教員はメリット部分を重視し、また、どちらともいえないと答えた教員は様々なデメリットとメリットの比較で踏み切れないといった実体が浮かび上がってくる。また、理論の展開に重点を置き情報機器利用の必要性を疑問視する声や、教員自身が学び研修していく場がないため、技術に不安を訴える声も少なからずある。

(3) 生徒アンケート集計結果の分析

Ｑ３　情報機器を使った授業を受けてみたいか、という問いに対しての回答とその理由をまとめると、次のようになった。

・受けたい（40%）理由……パソコンを使いたい。理解しやすい。興味がある。
・どちらともいえない（40%）理由……難しそう（でも必要そう）。未経験のため判断できない。
・受けたくない（20%）理由……難しそう。数学は嫌い。面倒。

以上から、情報機器を活用した数学の授業を受けてみたいと回答した生徒は約40%を占め、どちらともいえないと答えた生徒でも必要性を感じながらもためらう声が多く、これを含めると、全体の過半数が情報機器をこれからの社会で必要不可欠な道具としてとらえ

その必要性を訴えているといえる。

(4) 現行教科書の分析

出版社８社、教科書計13冊から、数学Ⅱ「微分の考え方」における指導方法を分析し、以下にまとめた。

① 平均変化率→微分係数→微分係数の図形的な意味（接線の傾き）→導関数の定義・計算までの流れは、各出版社ともほぼ同じである。

② 導関数学習後、関数の増減についての説明方法については差が見られ、大きく次の３種類に分類できる。

(i) $f'(x)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$において分母と分子の符号が一致することを利用（２冊）

(ii) 関数と接線は点Ｐの近くでは一致していることを利用。（５冊）

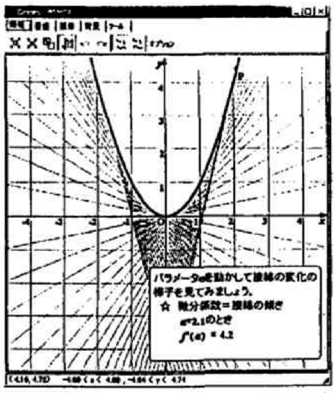
(iii) 具体例……２次関数で確かめながら、導関数と増減の関係をまとめる。（６冊）

③ 導関数の定義後、導関数の計算の習得に時間をとられるため導関数が何であるかという基本的な事項の定着が図れない。また、関数の増減の説明に時間がとられるなどの問題点がある。

４．教材と指導方法の工夫

上記、問題点の分析をもとに、都立高等学校におけるパソコンの使用環境を視野に入れ、研究のねらいに基づき、次のような教材と指導方法の工夫を行った。

(1) プログラムファイルの作成

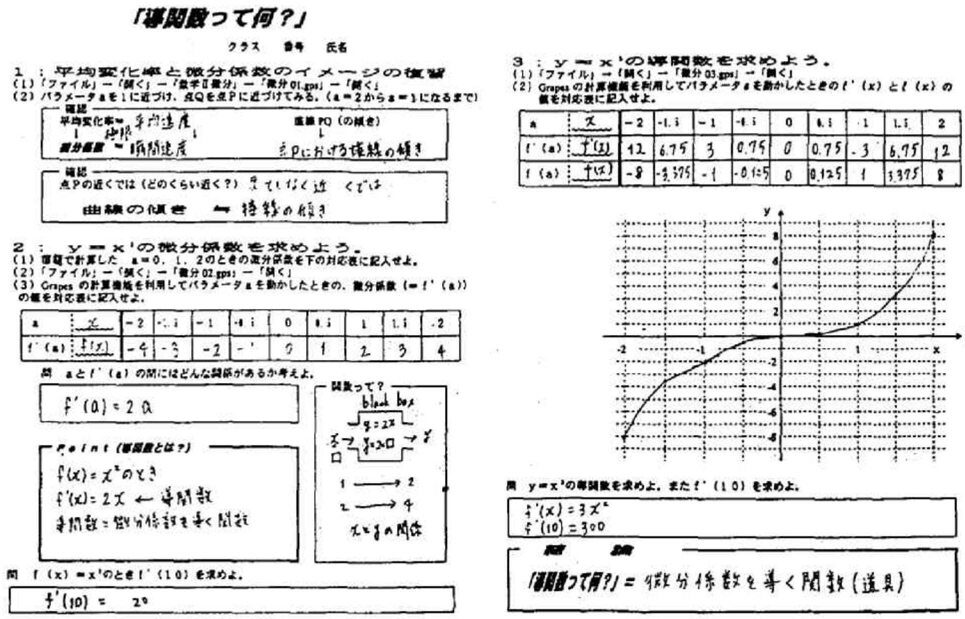


情報機器のハードウエア環境として、パーソナルコンピュータＩＢＭ ＰＣ／ＡＴ及びその互換機を選択し使用した。ソフトウエアの環境は、ＯＳとしてMicrosoft Windows系、この上で動作するフリーソフトウエアGrapes（Graph Presentation & Experiment System）を使用した。この環境下で、数学的活動を通して発見的な学習を意識し、微分01.gpsから微分09.gpsまでのファイルを作成した。

これらのファイルは、生徒が主体的にシミュレーション操作するためのものであり、これを使用することにより学習内容の理解を深める工夫を行った。

(2) ワークシートの作成

「導関数とは、何であるのか？」をテーマに、プログラムファイル微分01.gpsから微分04.gpsまでに対応したワークシート①と、「導関数は、何の役に立つのか？」をテーマとした、プログラムファイル微分03.gps、微分05.gpsから微分09.gpsまでに対応したワークシート②を作成した。ワークシート①、ワークシート②ともに、学習の確認事項やポイント・キーワードの記入、対応表の穴埋め、グラフの描画などを適宜指示し、一斉授業の中の個別学習となるよう工夫した。また、教員から生徒への提示用として、情報通信ネットワーク機能を活用し、プレゼンテーションソフトウエアを用いてワークシートへの記入などを逐次入力提示し、生徒の関心を引きつける工夫をした。



「導関数って何？」

クラス　番号　氏名

1：平均変化率と微分係数のイメージの復習

(1)「ファイル」－「開く」－「数学Ⅱ微分」－「微分01.gps」－「開く」

(2) パラメータaを1に近づけ、点Qを点Pに近づけてみる。(a＝2からa＝1になるまで)

確認

平均変化率＝平均速度　　直線PQ（の傾き）

極限

微分係数＝瞬間速度　　点Pにおける接線の傾き

確認

点Pの近くでは（どのくらい近く？）見ていなく近くでは

曲線の傾き ⇔ 接線の傾き

2：$y=x^2$の微分係数を求めよう。

(1) 暗算で計算した　a＝0、1、2のときの微分係数を下の対応表に記入せよ。

(2)「ファイル」－「開く」－「微分02.gps」－「開く」

(3) Grapesの計算機能を利用してパラメータaを動かしたときの、微分係数（＝f'(a)）の値を対応表に記入せよ。

a	x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
f'(a)	f'(x)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

問　aとf'(a)の間にはどんな関係があるか考えよ。

$f'(a)=2a$

関数って？　black box

Point（導関数とは？）

$f(x)=x^2$のとき

$f'(x)=2x$ ← 導関数

導関数＝微分係数を導く関数

問　$f(x)=x^2$のとき$f'(10)$を求めよ。

$f'(10)=20$

3：$y=x^3$の導関数を求めよう。

(1)「ファイル」→「開く」→「微分03.gps」→「開く」

(2) Grapesの計算機能を利用してパラメータaを動かしたときのf'(x)とf(x)の値を対応表に記入せよ。

a	x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
f'(a)	f'(x)	12	6.75	3	0.75	0	0.75	3	6.75	12
f(a)	f(x)	-8	-3.375	-1	-0.125	0	0.125	1	3.375	8

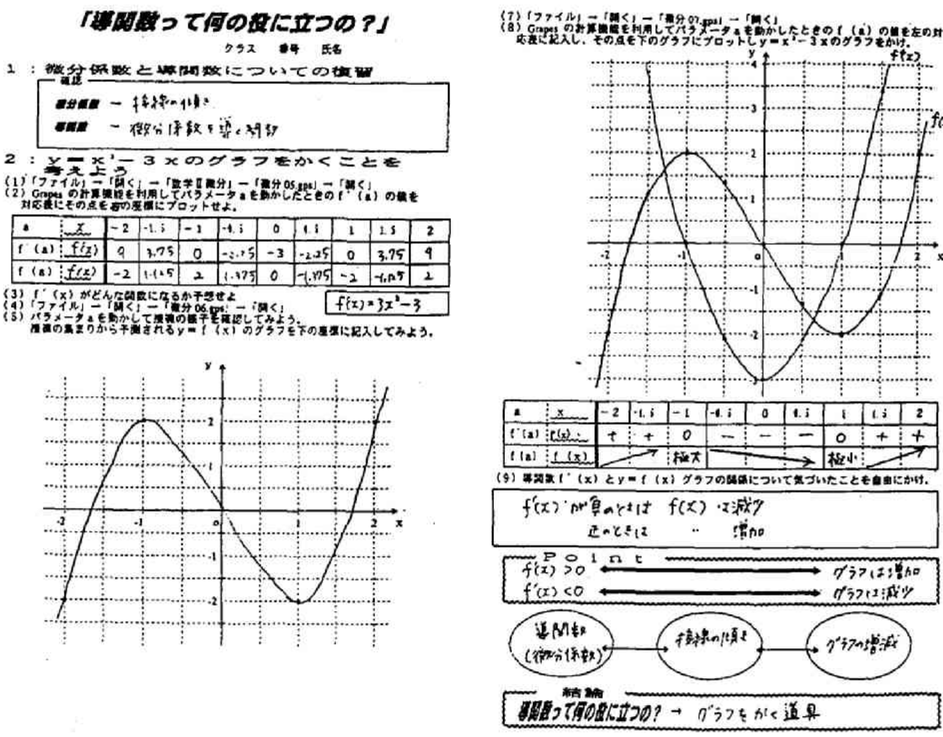
問　$y=x^3$の導関数を求めよ。また$f'(10)$を求めよ。

$f'(x)=3x^2$

$f'(10)=300$

結論

「導関数って何？」＝微分係数を導く関数（道具）



「導関数って何の役に立つの？」

クラス　番号　氏名

1：微分係数と導関数についての復習

確認

微分係数 － 接線の傾き

導関数 － 微分係数を導く関数

2：$y=x^3-3x$のグラフをかくことを考えよう

(1)「ファイル」－「開く」－「数学Ⅱ微分」－「微分05.gps」－「開く」

(2) Grapesの計算機能を利用してパラメータaを動かしたときのf'(a)の値を対応表にその点を右の座標にプロットせよ。

a	x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
f'(a)	f'(x)	9	3.75	0	-2.25	-3	-2.25	0	3.75	9
f(a)	f(x)	-2	1.125	2	1.375	0	-1.375	-2	-1.125	2

(3) f'(x)がどんな関数になるか予想せよ　$f'(x)=3x^2-3$

(4)「ファイル」－「開く」－「微分06.gps」－「開く」

(5) パラメータaを動かして接線の様子を確認してみよう。接線の集まりから予測されるy＝f(x)のグラフを下の座標に記入してみよう。

(7)「ファイル」－「開く」－「微分07.gps」－「開く」

(8) Grapesの計算機能を利用してパラメータaを動かしたときのf(a)の値を左の対応表に記入し、その点を下のグラフにプロットし$y=x^3-3x$のグラフをかけ。

a	x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
f'(a)	f'(x)	+	+	0	−	−	−	0	+	+
f(a)	f(x)	↗		極大	↘			極小	↗	

(9) 導関数f'(x)とy＝f(x)グラフの関係について気づいたことを自由にかけ。

f'(x)が負のときは　f(x)は減少

正のときは　〃　増加

Point

$f'(x)>0$ ⟷ グラフは増加

$f'(x)<0$ ⟷ グラフは減少

導関数（微分係数）⟷ 接線の傾き ⟷ グラフの増減

結論

「導関数って何の役に立つの？」→ グラフをかく道具

5．指導計画

以上のような教材、及び、指導方法をもとにして次のような指導計画を立てた。

第１時限　導入、平均速度と瞬間速度

第２時限　極限の計算

第３時限　平均変化率と微分係数

第４時限　導関数って何？　本時①

第５時限　導関数って何の役に立つの？　本時②

第６時限　導関数の定義と計算

第７時限　導関数の応用(1)　グラフ１

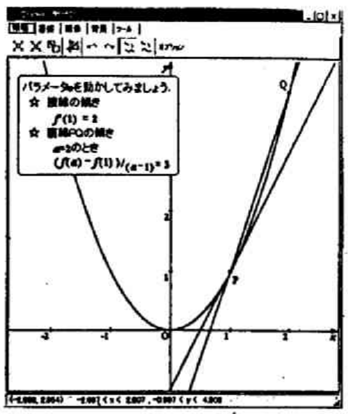
第８時限　導関数の応用(2)　グラフ２

第９時限　導関数の応用(3)　最大・最小

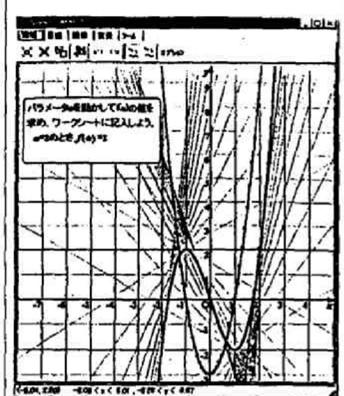
第10時限　導関数の応用(4)　方程式・不等式

6．学習指導案

(1)　本時①の目標：変数とその微分係数の間に関数関係があることを発見し、「導関数が微分係数を導く関数（道具）である」ことを理解する。

時間	指　導　内　容	学　習　活　動	指導上の留意点
導入 15分	既習事項の復習 ・平均変化率と微分係数の関係を確認する。 ・点P周辺の領域を拡大、提示する。	ファイル開く「微分01.gps」 ・パラメータaを2から1に近づけながら、そのときの直線の変化の様子を観察する。 	・微分係数が接線の傾きを表すことを視覚的に確認する。 ・拡大をすることにより接線と直線の傾きがほぼ等しいことを確認する。
展開1 20分	導関数の導入 ・$y=x^2$の微分係数の対応表を作成する。 ・微分係数が関数になることを発見する。 ・導関数の考え方を導入する。 ・関数から微分係数を求める。	微分係数の復習をする。 ファイル開く「微分02.gps」 ・Grapesを用いてワークシートのaとf'（a）の対応表を作成する。 （パラメータaを－2から2まで動かす。） ・ワークシートの対応表からf'（a）＝2aという関係を発見する。 ・a→x　f（a）→f（x）に置き換える。 ・f（x）＝x^2のときf'（x）＝2x ・f'（10）を導関数から求める。	・宿題解答 ・Grapesの計算機能の利用を指示する。 ・「関数って何だろう？」と発問することにより、発見の手助けをする。 ・導関数＝微分係数を導く関数であることを強調する。
展開2 10分	$y=x^3$の導関数を見つける。	ファイル開く「微分03.gps」 ・Grapesを用いてワークシートのxとf'（x）、f（x）の対応表を作る。 （パラメータaを－2から2まで動かす） ・y＝f'（x）のグラフをワークシートにプロットし、f'（x）＝3x^2を発見する。	・Grapesの計算機能の利用を指示する。 
まとめ 5分	・関数が微分係数を求めるための道具であることを確認する。 ・接線の集まりからグラフがイメージできることを確認する。	・微分係数と導関数の関係について確認する。 ファイル開く「微分04.gps」 ・$y=x^2$の接線をすべて表示しグラフがイメージできることを確認する。 （パラメータaを－2から2まで動かす）	

(2) 本時②の目標：「導関数の符号」、「接線の傾き」、「グラフの増減」の関係について発見し、「導関数がグラフをかくのに役に立つ」ことを理解する。

時間	指導内容	学習活動	指導上の留意点
導入 5分	前時までの確認 ・$y=x^3$を表示する。	ファイル開く「微分03.gps」 ・導関数は微分係数を導くための関数であることを確認する。 ・微分係数＝接線の傾きであることを確認する。	
	・$y=x^3$ の接線の軌跡からグラフが予想できることを確認する。	・$y'=3x^2$接線の残像を表示する。 （パラメータaを－2から2まで動かす）	・微分係数＝接線の傾きを再度強調する。
展開1 15分	導関数の符号とグラフの増減との関係を調べる。 ・$y=x^3-3x$の微分係数の対応表を作成する。	ファイル開く「微分05.gps」 ・Grapesを用いてワークシートのaと$f'(a)$の対応表を作り、同時に$f'(a)$の点をプロットする。 （パラメータaを－2から2まで動かす）	・Grapesの計算機能の利用を指示する。
	・$y=f'(x)$を予想する。	・$y=f'(x)$を予想する。	・導関数$y'=3x^2-3$を確認する。
	・接線の集まりから$y=f(x)$のグラフを予想する。	ファイル開く「微分06.gps」 ・接線の残像を表示し、$y=f(x)$のグラフの概形を予想しワークシートに記入する。 （パラメータaを－2から2まで動かす）	
	・aと$f(a)$の対応表を作り、$y=x^3-3x$のグラフをかく。	ファイル開く「微分07.gps」 ・Grapesを用いてワークシートのaと$f(a)$の対応表を作り、同時に$y=f(a)$の点もプロットする。 （パラメータaを－2から2まで動かす）	
	・関数とグラフの増減の関係について考察する。	・導関数とグラフの変化の様子について気づいたことを自由に話し合い、仮説を発表する。	・必要に応じて「微分08.gps」を開き、理解の手助けとする。
まとめ 5分	導関数の符号、接線の傾き、グラフの増減についてまとめる。	ファイル開く「微分08.gps」 ・グラフを見て、$f'(x)>0$（<0）グラフ増加（減少）を確認する。	・Powerpointにより強調する。
	・導関数がグラフをかくのに役に立つことを確認する。	ファイル開く「微分09.gps」 ・点Pの周辺の領域を拡大する。	

7．分析と考察

検証授業は、都立Ａ高等学校全日制課程普通科２年生の１クラス（41人）で実施した。授業後評価問題を２年生の４クラスで行い、パソコンを使用したクラスの結果を以下に示す。

なお、(カッコ) 内には、パソコンを用いなかったクラスの結果である。

(1) 微分係数の値の変化が関数として表現されることを主体的に学習する。

Grapesの計算機能を利用することで、計算が苦手な生徒でも自分でパソコンを操作して対応表を作成することができ、生徒のアンケートの結果からも、３／４の生徒が普段の教室の授業より面白いと感じていた。理解度に関しては、評価問題の結果から導関数が微分係数を導くための道具であることを95％（36％）の生徒が理解できていた。

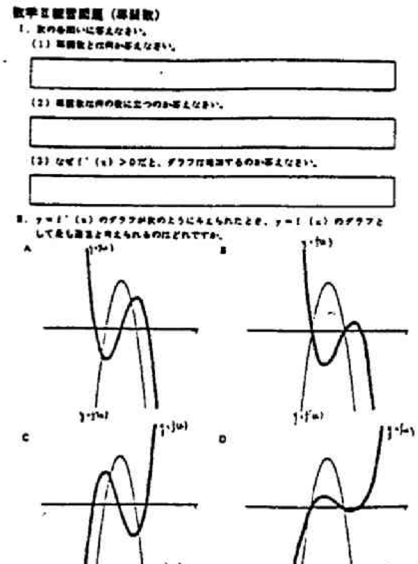
(2) 微分係数の図形的な意味である接線の傾きの変化の様子から関数の増減を予測する。

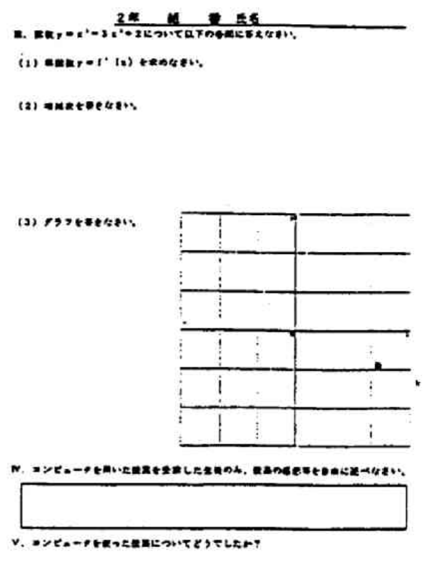
Grapesの描画機能を利用することで接線の軌跡が簡単に見ることができるので、生徒の直感的理解を大いに助けることができ、生徒もグラフの変化の様子を大変興味をもって調べていた。理解度に関しても、微分係数が接線の傾きを表し、局所的には曲線の傾き＝接線の傾きになることがGrapesの拡大機能によって定着できた。

(3) 導関数の符号の変化が関数の増減を表すことを発見しその理由を考察する。

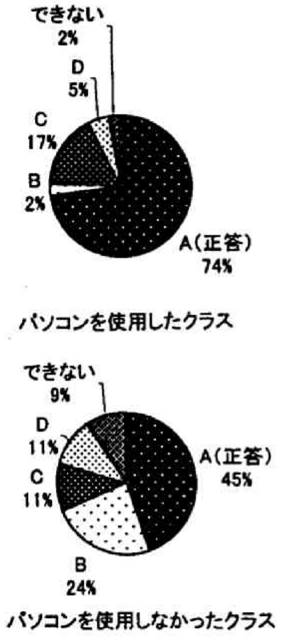
指導案では、導関数と元のグラフを一つの座標に表示することで、生徒が導関数の符号と関数の増減の関係を発見することを意図したが、パソコン自体の操作に時間をとられ予定したほど議論の時間を確保できなかったため、検証授業内にこちらの意図した発見が十分できたとは言い難かった。しかし、その後の授業で再度確認したためか、理解度においては75％（44％）の生徒が導関数ともとの関数のグラフの関係を理解しており、更に48％（28％）の生徒が「導関数の符号→接線の傾き→グラフの増減」ということが理解できていた。

また、教科書にあるような３次関数のグラフをかく問題においても83％（74％）の生徒が正解した。





問題Ⅱの正答率



全体的に、普段の教室での授業より興味をもって主体的に取り組んだことが、以下のような生徒の事後の感想からもうかがえた。

・グラフの様子（増減）がよくわかり、計算の部分はパソコンがやってくれるからその授業の学びたいとこだけ重点的に学べる。

・ノートに書かなくてはわからないグラフなどがパソコンを使用することによって目で見ることができる。接線の変化などはすごかった。

・先生の指示に従って自分でパソコンを操作することによって、発見して理解する。映像があるのは関数の授業では心強い。授業に対する姿勢がより自主的になる。

ただし、今回検証授業を行ったクラスは、高校のパソコン教室を初めて利用した生徒がほとんどだったためか、パソコンの操作自体に追われ、数学の本質的な内容に集中できなかったため、普段の授業より理解しにくいと答えた生徒も数人いた。

8．まとめと今後の課題

数学Ⅱ「微分の考え方」の学習は、導関数の計算ができたり、増減表からグラフがかけたりするようになっても、「導関数がどういうものなのか」、「どうして導関数からグラフがかけるのか」といった内容はなかなか理解しにくい単元である。本研究では、情報機器やネットワーク通信を効果的に活用することで、「導関数って何？」、「導関数って何の役に立つの？」というテーマについて、生徒が主体的に発見することを意図してグラフ作成ソフトGrapesを用いて指導内容・方法の工夫を行った。

Grapesの計算機能、描画機能、拡大機能を利用することで、生徒の視覚化による直感的理解と主体的な活動を助けることができ、その結果、検証授業・評価問題において、生徒の興味・関心度に関しても、理解度に関しても、本研究の目標はほぼ達せられたと思われる。

しかし、予想以上にパソコン操作に慣れていない生徒は、パソコン自体の操作に追われ、数学の本質的な内容の理解が不十分になる可能性があるため、今後の課題としては、以下の点があげられる。

・専門用語（ファイル、ドラッグ等）を用いるときの注意（ファイルという言葉については、１／３、ドラッグ、フォルダ、ドライブについては２／３以上の生徒が知らなかった）

・機器のトラブル等に対応するための情報アドバイザー等の活用（複数教員での指導）

・コンピュータリテラシーの定着のために、新カリキュラムの教科「情報」との連携

今後は、数学Ⅱ「微分の考え方」の内容以外にも、より生徒が主体的に取り組む数学の授業を目指して、情報機器を活用した教材の開発や指導法の研究に取り組んでいきたい。

［参考文献・引用］

［１］　文部省、高等学校学習指導要領、1999

［２］　URL　http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/

Ⅲ　物理との関連を図り、創造性の基礎を培う微分の指導

概　要

「数学Ⅱ」で学習する微分の応用例として、身近な物理現象を数学的に考察処理できるような教材を考え実践することにした。その結果、自然法則を理解するために数学が重要な役割を果たしていると生徒が感じるようになり、数学的活動を通して数学的な見方や考え方のよさを認識できるようになった。

1．研究のねらい

高等学校教育では物理と数学の関連性があまり強調されていないことが多い。ほとんどの高校生が「数学Ⅱ」の指導内容である微分まで学習するが、その応用範囲までは十分に説明されていないのが現状である。しかし、歴史的観点からしても微分は物理学から発展してきた分野であり、自然法則を理解する上で不可欠な存在である。連続的に変化する物理現象を解析的に考察することで、微分が自然法則を発見・理解する上でも重要な役割を果たしていることが実感できる。さまざまな自然現象は数学的活動を通して客観的に把握することができるのである。さらに、これらのことを学習していく過程で創造性を高めることもできると考えた。

そこで本研究では、身近な物理現象（速度・加速度・力学的エネルギー保存則）を題材にあげ、「数学Ⅱ」の微分を用いて処理し生徒が数学の重要性に気付くことができる指導法を考察した。また、微分の学習を深めることによって、積分の学習にもつながるように配慮した。

2．研究の内容・方法

「数学Ⅱ」の微分の学習が一通り終了した後に展開できる教材の研究を以下の手順で進めた。

(1)　中学の理科や高校の物理の教科書等を調査し、扱われている内容やその導入を調べる。ただし、今回の検証授業においては、高校の物理の知識を前提にしないように配慮する。

(2)　生徒が理解しやすいように教材を配列する。微分の学習が終わっている生徒を対象とするため、微分の導入方法や学習内容が多少異なっていても対応できるように配慮する。

(3)　4時間分の指導計画を立てる。まず微分の概念を用いて実験結果から運動方程式を導き、さらにそこから演繹的に力学的エネルギー保存則を導く教材を開発する。その際に必要となる物理概念についても同時に調べる。（ただし、微分の記号は、ダッシュを用いる。）

(4)　検証授業は全日制普通科２年生30名を対象に「数学Ⅱ」の授業で実施する。最後にアンケート調査を行い、数学の必要性の理解・内容の妥当性などをチェックする。

3．指導計画

第１時限：実験データから微分の考え方を用いて、運動方程式を導く。

①等速直線運動のストロボ写真から速度を求め、位置と時間の関係を示すx-tグラフが直線になることを確認し、傾きが速度と一致することを理解する。（傾きは１秒間にグラフがどれだけ上がったかで読みとる。）

②力の大きさ＝１【N】、質量＝１【kg】の場合について、時刻と位置の関係を表にまとめたデータを示し（こちらで用意し）、これから時間と速度の関係を考える。

（実際には力の大きさと質量の値は数種類用意し、各生徒はその中の一組を考えた。）

・x-tグラフを描く。(放物線になるが、生徒にはなめらかな曲線で結ぶように指示。)

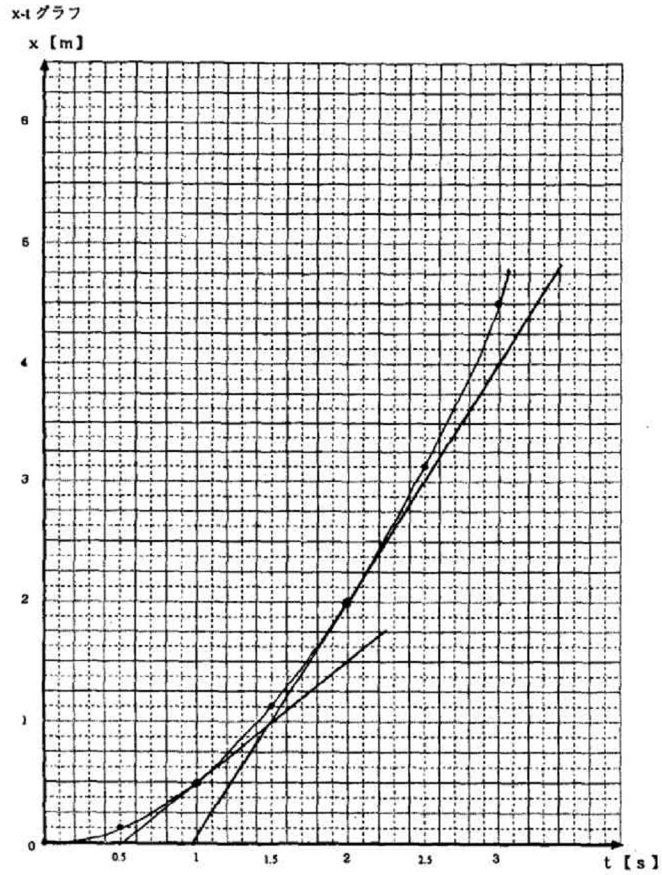
・各時刻での接線を引き（微小時間内ではグラフは直線と見なせるのでそれを延長し）、傾きを読みとる。直線と見なせるグラフでは傾きが速度となるので、これが瞬間速度となる。（接線を正確にひくことは不可能なので誤差がでるが考え方を強調したい。）

・速度と時間の関係を示すv-tグラフを描き、直線になることを確認する。

（「加速度」を定義し、「加速度＝一定」とまとめる。）

③力の大きさ＝１【N】、質量＝１【kg】以外の結果も示して（実際には他の生徒の結果をまとめて）力＝質量×加速度すなわち運動方程式Ｆ＝ｍａを発見する。

時刻 t【s】	位置 x【m】	速度 v【m／s】
0	0	0
0．5	0．125	0．5
1	0．5	
1．5	1．125	1．5
2	2	
2．5	3．125	2．5
3	4．5	3



第２時限：力と質量から運動方程式を用いて、加速度・速度・位置関数を微分の考えにより求める。（詳細は、４．学習指導案及びワークシート）

第３時限：力学的エネルギー保存則の概要を理解する。

①自由落下する物体にかかる重力の大きさを求める。(図１)

②落下開始点を原点、軸を下向きに取り、速度関数と位置関数を求める。(対応表を作成)

③各時刻での高さを調べ、高さを表す関数を求める。(表１)

④座標変換を行い、原点を地上に軸を上向きに取った場合の速度関数と加速度関数を求める。向きを考えると「速度および加速度が負になる場合」があることを説明する。

⑤座標変換後の各時刻の速度を求める。(図２)

⑥各時刻での位置エネルギーと運動エネルギーを求める。

⑦位置エネルギーと運動エネルギーの和が一定であることを確認する。(表２)

時刻 t【s】	加速度 a【m/s²】	速度 u【m/s】	位置（落下距離） x【m】	位置（地面からの高さ） h【m】
0	10	0	0	125
1	10	10	5	120
2	10	20	20	105
3	10	30	45	80
4	10	40	80	45
5	10	50	125	0

表1

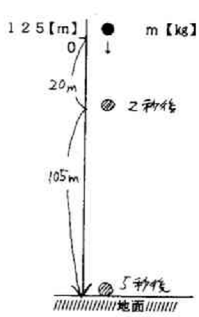


図1

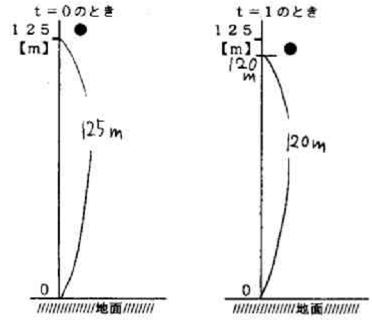


図2

時刻 t【s】	加速度 α【m/s²】	速度 v【m/s】	高さ h【m】	位置エネルギーU【J】	運動エネルギーK【J】	力学的エネルギー U＋K【J】
0	−10	0	125	1250m	0	1250m
1	−10	−10	120	1200m	50m	1250m
2	−10	−20	105	1050m	200m	1250m
3	−10	−30	80	800m	450m	1250m
4	−10	−40	45	450m	800m	1250m
5	−10	−50	0	0	1250m	1250m

表2

第４時限：エネルギー保存則を演繹的に導き、数学の創造性にふれる。（詳細は、４.）

①運動方程式から力学的エネルギー保存則を微分の考え方を用いて導く。

②空気抵抗が働く場合、力学的エネルギーの和は減少することを証明する。

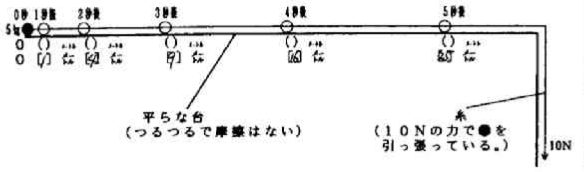
４．学習指導案及びワークシート

第２時限

＜加速度・速度・位置＞

力 ＝ 質量 × 加速度

F【N】＝m【kg】× a【m/s²】 …… ＊



問１　5【kg】の静止した物体に、10【N】の力をかけたときの加速度を求めよ。

（解）
m＝5、 F＝10 だから ＊式 に代入すると

$\boxed{10}$【N】＝ $\boxed{5}$【kg】× a【m/s²】

よって、 a＝ $\boxed{2}$ …… 〔1〕 加速度は一定である。（等加速度運動）

問２　右上の表の加速度 a【m/s²】の欄を埋めなさい。（〔1〕よりすべて同じ値）

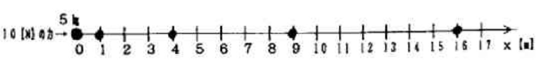
問３　初めの速度は0で、加速度（1秒間に増える速度）が問２より $\boxed{2}$ だから
1秒後の速度は　0＋ $\boxed{2}$ ×1＝ $\boxed{2}$
2秒後の速度は　0＋ $\boxed{2}$ ×2＝ $\boxed{4}$
3秒後の速度は　0＋ $\boxed{2}$ ×3＝ $\boxed{6}$

問４　速度 v を 時間 t の式で表しなさい。

v＝ $\boxed{2}$ × t …… 〔2〕

問５　右上の表の速度 v の欄を埋めなさい。（〔2〕より時間tの値により速度vは決まる）

問６　上の図の（）の中は何mか。予想して書きなさい。
また、右上の表のxの予想欄を埋めなさい



xは物体の位置で時間tにより決まるから、位置関数といいx（t）と表す。速度vは速度関数といいv（t）、加速度aは加速度関数といいa（t）と表す。

組　　番 氏名　　　　（NO 4）

時間 t【s】	加速度 a【m/s²】	速度 v【m/s】	位置 x【m】（予想欄）	位置 x【m】（正解欄）
0	2	0	0	0
1	2	2		1
2	2	4		4
3	2	6		9
4	2	8		16
5	2	10		25
t	2	2t（tの式を書く）		t^2（tの式）

問７　1秒後の位置は x（1）
2秒後の位置は x（2）
3秒後の位置は x（3） などと表す。

次の□を埋めなさい。

1秒後から（1＋h）秒後までのh秒間の平均の速さは、

$$\frac{x(1+h)-x(\boxed{1})}{h}$$ となる。

h→0とした式

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(1+h)-x(\boxed{1})}{h}$$

は、

1秒後の瞬間の $\boxed{速度}$ を表す。

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(1+h)-x(\boxed{1})}{h}$$ は、x（t） の t＝1 における微分係数といい、

ダッシュをつけて $x^{\boxed{\prime}}(1)=\lim_{h\to 0}\frac{x(1+h)-x(\boxed{1})}{h}$ と表すことは以前に学んだ。

従って、t秒後の瞬間の速度は、$x^{\boxed{\prime}}(t)$ と表される。

t秒後の瞬間の速度を v（t） で表すと v（t）＝$x^{\boxed{\prime}}(t)$

よって、問４において v（t）＝$x^{\boxed{\prime}}(t)$＝2t

問８　x′（t）＝2t より、x（t）は微分したら2tになる式である。さて、x（t）はどんな式か。

x（t）＝ $\boxed{t^2}$ ………………………… 〔3〕

問９　〔3〕を使って左上の図の〔〕ｍを埋めなさい。
また、表の正解欄を埋めなさい。

問１０　左下の数直線上に1秒ごとの点●をとってみよう。

まとめ　10【N】の力が、質量 5【kg】の物体に働き続けるときの加速度は $\boxed{2}$【m／s²】で、
t秒後の速度は $\boxed{2t}$【m／s】
t秒間その力がはたらいたときの物体の位置は $\boxed{t^2}$【m】

＜本時の目標＞・運動方程式を用いて、力・質量から加速度を求める。

・加速度から速度及び位置を求める。

・位置関数の導関数が速度関数、速度関数の導関数が加速度関数になることを確かめる。

項目	指導内容	学習活動	留意点
導入5分	運動方程式の復習		
展開 30分	力が一定の場合には等加速度運動になり、位置関数が２次関数になることを示す。 ①力と質量から加速度を求める ②加速度が一定であるとき、速度関数を求める。 ③１秒後・２秒後等の位置を予想する。 関数名を定義 ④位置関数を求める。 位置関数を $x(t)$ と置く。 このとき $v(1)$ を求める式を考える。 ⑤ $x(t)$ と $v(t)$ の関係を考える。 ⑥微分して $v(t)$ になる関数を探す。 ⑦表を完成する。 ⑧ $x(t)$、$v(t)$、$a(t)$ の関係を考える。	ワークシートNO. 4 ５【kg】の静止した物体に、10【N】の力をかけたときの加速度を求める。 10【N】＝５【kg】×ａ【m／s^2】 ａ＝２ 表のａ、ｖを埋め、$v(t)$ を求める。 この例では $v=2t$ であることを確認する。 予想を思い思いに入れる。 $x(t)$：位置関数、$v(t)$：速度関数、$a(t)$：加速度関数 $v(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{x(1+h)-x(1)}{h}$ $=x'(1)$ $v(t)=x'(t)$ であることに気付く。 $x(t)=t^2$ を発見する。 $x(t)$ の導関数が $v(t)$、$v(t)$ の導関数が $a(t)$ であることを発見する。	微分の導入で速度と位置の関係をどのように扱っているかで展開が異なる。 積分定数は触れない
練習 10分	数値を変えて、$x(t)$ を求める練習を行う。	ワークシートNO. 5（省略） 力の大きさ　８【N】　質量　２【kg】	
まとめ ５分	位置関数の導関数が速度関数、速度関数の導関数が加速度関数となる。		

第1時限ではグラフの接線を引くことに慣れていない生徒が多く、教師による説明を必要とした。今回は座席の列ごとに別のデータを与えたが、同一のデータを用いて一度説明しておく方がよいと思われる。さらに全データをグラフ化できるように横軸と縦軸の目盛り間隔を同じにしなかったため、傾きを読むことが出来ない生徒が見られた。グラフ用紙を別紙にするなどして、目盛り間隔を同じにした方がよいと思われる。あらかじめグラフ上の点を数点プロットしておいたことは、能率を上げるためには有効な手段であった。

第2時限では、加速度・速度・位置の間の関係はほぼ理解でき、積分への動機付けになった。現時点では原始関数を求めることができない生徒が多少見られたが、ヒントを与えることにより発見できた。

第4時限

<本時の目標>・運動方程式から微分の考え方を用いて、力学的エネルギー保存則を導く。

・微分の考え方を用いて、量の変化の仕方を説明できることを知る。

項目	指導内容	学習活動	留意点
導入5分	前時の復習		
展開1 30分	力学的エネルギー保存則を運動方程式から導く。 ①は、$\{v^2(t)\}'$ $=\lim_{h\to 0}\dfrac{v(t+h)^2-v(t)^2}{h}$ 分子を因数分解して、 $\{v^2\}'=2vv'$ 左辺は時刻tで微分すると0になるから、時刻によらない定数である。 座標変換により、重力は、 $F=-mg$	ワークシートNO.7【Ⅲ】、NO.8(省略) 運動方程式の両辺に$v(t)$をかける。 $m\alpha(t)v(t)=Fv(t)$ $mv'(t)v(t)=Fh'(t)$と変形する。 微分して左辺、右辺になる関数を求める。 ・右辺　$Fh(t)$　($\because F=-mg$　で定数) ・左辺　$\frac{1}{2}m\{v^2(t)\}$ ……① $\frac{1}{2}m\{v^2(t)\}'=Fh'(t)$と書き直す。……② 微分の公式を用いて $\{\frac{1}{2}mv^2(t)-Fh(t)\}'=0$と変形する。 $\frac{1}{2}mv^2(t)-Fh(t)=$一定値　を理解する。 自由落下の場合$F=-mg$であるから、 $\frac{1}{2}mv^2(t)+mgh(t)=$一定値　と書き直す。 「力学的エネルギーの和は保存される。」ことが運動方程式から導かれることを理解する。	$Fv(t)$は物理学では仕事率と呼ばれる量。 (中学での既習事項) (仕事率の単位は【W】)
展開2 15分	空気抵抗がはたらく場合、力学的エネルギーの和は減少することを証明する。	ワークシートNO.8 雨粒が落下してくる場合、力学的エネルギーの和が保存されていると仮定して、地表での速度を求める。 (実際には速度はかなり小さい。)	

	空気抵抗が働く場合、運動方程式から力学的エネルギーの和が減少することを導く。 空気抵抗は速度にほぼ比例する。比例定数をk（>0）とする。このとき速度はマイナスであり、空気抵抗は上向きにはたらく（すなわち力としてはプラス）ので－ｋｖとなる。	$m\alpha = -kv - mg$ $mv' = -kv - mg$ ……③ $mvv' = -kv^2 - mgv$ $(\frac{1}{2}mv^2)' = -kv^2 - (mgh)'$ $(mgh + \frac{1}{2}mv^2)' = -kv^2 < 0$ よって、力学的エネルギーの和は時間で微分すると負になる。すなわち減少関数である。 失われたエネルギーは抵抗によって発生する熱になると考え、エネルギーの減少分が熱エネルギーに転化したとして理解されることを知る。 （例、流れ星はなぜ光るかがわかる。）	
まとめ 5分	時間の経過にしたがい量がどのように変化していくかが、微分の考え方をいて説明できる。		

第３時限では力学的エネルギー保存則を確認するための表は正確に埋められていた生徒が多かった。座標軸の変換により力・速度・加速度にマイナスがつくことにも、生徒の抵抗は少なかったようである。

第４時限は他への発展も考えて、運動方程式からエネルギー保存則を導く方法を採った。ただし、生徒の学習到達度によっては「力学的エネルギーの和」を微分して０になることを導く方法もあろう。また、時間の関数であることを強調するために $v(t)$ などと表したが、２乗を表記するときに $\{v(t)\}^2$ となり括弧が多くなってしまった（指導案では $v^2(t)$ という表記を用いている）。(t)を省略した方がよいかまたは指導案のような表記がよいかどうかは今後の課題である。v^2 の微分は運動方程式からさまざまな自然現象を理解する上で不可欠なものである。「数学Ⅱ」の範囲をやや越えるが、合成関数の微分法から導くのではなく、定義にしたがって導くことにより半数以上の生徒が理解できた。具体的にｖの式を与え、例えば $v = 2t$ のとき $(v^2)' = (4t^2)' = 8t$ となり $2vv' = 2 \times 2t \times 2 = 8t$ で $(v^2)' = 2vv'$ となるなど例を提示するとなお理解が深まるかもしれない。指導案②式にある $\frac{1}{2}m\{v^2(t)\}' = Fh'(t)$ からさまざまなエネルギー保存則が導ける。例えば、$F = -kh$ とすれば、弾性エネルギーと運動エネルギーの和が一定であることが導ける。今回空気抵抗がある場合の速度を表す関数（指導案③式の解）は「数学Ⅱ」で学習する指数関数であることにも触れて、グラフの概形を板書したが、生徒は興味を示したようである。

5．アンケート結果

アンケートの有効回答数は26人であった。アンケートの設問及び回答内容は次のとおりである。

① 自然界の法則を理解する上で数学が重要な役割を果たしていることに気がつきましたか。

ア．気がついた（23％） イ．そんな感じがした（62％） ウ．わからない（15％）

② 数学がなかったら、どのような社会になっていると思いますか。（自由記述）

・私たちの生活を支えている物のほとんど（飛行機、コンピュータ、エレベーター、高層ビルなど）が無くなって不便な社会になっているはずだ

・物の単位を決められないはず

・今ある機械はすべて存在せず、江戸時代以前とそれほど変わりない社会になっていると思う

③ 自由に感想を書いて下さい。（自由記述）

・物を作るときには、必ず数が必要になるので数学は必要不可欠だと思う。

・世界にはまだ解らないことがたくさんあるから数学が必要になることが多いと思う

・数学が創造の世界を広げているのだと思う。「創造する」事が出来るようになったのは、数学のおかげだと言えると思う。

・1時間目の授業は、とてもわかりやすかった。2時間目もまあまあ解ったけど、3時間目になると難しい式や、初めて聞く言葉ばかりで難しかった。

・数学をやっているのか、物理をやっているのかどっちかわからなかった。

・楽しかった。奥が深そうな数学です。

・数学も創造性も人間にとって大切な物であり、必要不可欠な物と言えます。これから、人間がどれだけ創造性を使い、進化していくか、それとともに数学がどのように解かれ、使われていくのかがとても楽しみです。

6．分析

授業中の生徒の様子と回収したワークシートにより、到達度を判断した。

A…ほぼ達成した B…半数以上の生徒が達成した C…困難であった

第1時限		第3時限	
・等速運動のx-tグラフの傾きの意味	…A	・重力加速度から重力の大きさ求める	…A
・等加速度運動のx-tグラフの作成	…A	・重力加速度から速度と位置を求める	…A
・x-tグラフの接線を引く	…B	・マイナスの速度・加速度を理解する	…A
・接線の傾きから速度を求める	…B	・エネルギー保存則の確認	…A
・v-tグラフの作成	…A	第4時限	
・運動方程式を発見する	…A	・運動方程式の式変形によりエネルギー	
第2時限		保存則が導けることの理解	…B
・力と質量から加速度を求める	…A	・v^2の微分	…B
・加速度と速度の関係を理解する	…A	・時間で微分して0⇒一定	…A
・速度と位置の関係を理解する	…A	・空気抵抗がある場合の考察	…C

7．まとめと今後の課題

今回の授業実践では実験データを数学的に処理することにより基本的な法則を発見し、さらに微分の考え方を用いて他の法則を導き出すことを行った。生徒が身近な現象を数学的に表しし、さらに隠された法則を発見する体験ができた。また、数学と物理学との関連にも触れて、数学が人間が作り出した単なる想像の産物にすぎないわけではなく、自然界を理解する上で必要不可欠な存在であり、両者は切り離しては考えられないことも実感できたと思われる。アンケート結果からも「『創造する』事が出来るようになったのは、数学のおかげだと言えると思う。」と述べる生徒もいた。生徒が数学に対する興味・関心を高め、数学的な見方や考え方のよさを実感できるには、実生活に密着した内容を取り入れることも有効であると考えられる。

今回の指導内容は「数学Ⅲ」まで学習している生徒には、より理解しやすい内容であるが、ほとんどの高校生は「数学Ⅱ」までしか履修していないのが現状である。「数学Ⅱ」で学習する微分の内容に簡単な合成関数の微分法あるいは積の微分法（関数ｆ（ｘ）の２乗の微分程度）を取り扱うことが可能になれば、さらに容易に運動方程式からエネルギー保存則を導く過程を理解できるであろう。４時間目の指導案②式において、力Ｆが位置ｈの関数で、$Fh' = -U'$ と表せる場合、$\frac{1}{2}mv^2 + U =$ 一定となり、他のエネルギー保存則が導ける。Ｆの例としてフックの法則、万有引力の法則、クーロンの法則などがある。(このような力Ｆを保存力という。)（ただし、万有引力とクーロンの法則は、合成関数と分数関数１／ｘの微分が必要である。）

また、今回取り上げなかったが、２物体の衝突では運動方程式と作用・反作用の法則から、$m_1v_1' = F$……①、$m_2v_2' = -F$……② が成り立ち、①＋②から運動量保存則が導かれ、①×v_1＋②×v_2 から運動エネルギーの損失がどのようになるかが理解される。以上のように今回の指導内容は、発展性に富んだ、創造性を高める内容になっている。

整関数しか扱っていない「数学Ⅱ」の範囲で、整関数以外の関数も微分可能かどうかという問題（厳密性）や関数の二乗の微分の必然性（系統性）が問われると思われるが、学習した範囲内で説明・応用できることには限界がある。数学がどのように役立ち、創造性に富んだ教科であるかを示すためには、厳密性や系統性に拘束されない大きな流れを実感させたり、他教科との関連性を強調することも重要なのではないだろうか。

理数系離れが進む現在、さらに生徒の実態に対応した指導内容・方法の工夫が必要であると考える。

参考文献

・中学校理科の教科書（東京書籍、啓林館、大日本図書　等）
・高等学校物理の教科書（三省堂・実教出版・啓林館　等）
・山本義隆著　物理入門　駿台文庫　1989
・戸田盛和著　物理入門コース１力学　岩波書店　1983
・砂川重信著　力学の考え方　岩波書店　1993
・宮台朝直著　初等物理シリーズ１力と運動　培風館　1988