

高等学校

平成 13 年 度

教育研究員研究報告書

数	学
---	---

東京都教職員研修センター

主題 身近な事象を数学的に考察し、数学的な見方や考え方のよさを感得させる教材や指導方法の工夫

主題設定の理由

平成11年3月告示の高等学校学習指導要領では、数学の目標として、「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。」ということが示されている。

本研究では、数学的活動を通して、身近な事象との関連を図ったり、観察や操作などの数理的な考察をするなどして、数学的な見方や考え方のよさを認識させる教材、指導方法の工夫に焦点を当て、上記の主題を設定し、検証授業を行い分析した。

題材としては、三角関数、指数関数及び微分の数学Ⅱで扱う単元を取り上げ、指導においては、ワークシートを工夫し、照度計や情報機器などを活用した。

平成13年度教育研究員（数学）名簿

班	研究テーマ	学校名	氏名
I	視覚的な発見を通して三角関数のグラフの理解を深める指導	都立八王子北高等学校	吉 武 敦
		都立山崎高等学校	川 端 由美子
		都立福生高等学校	祢 津 朋彦
II	身近な事例を通して指数関数の考え方を理解させる指導	都立向丘高等学校	矢 野 忠 夫
		都立蔵前工業高等学校	小 松 真
		都立紅葉川高等学校	山 岸 啓 一
III	図形的な立場から微分概念の理解を深める指導法の研究	都立富士高等学校	古 橋 竜 哉
		都立光丘高等学校	加 藤 竜 吾
		都立多摩高等学校	大 森 忠
		都立小平西高等学校	杉 谷 英 樹

担当 東京都教職員研修センター研究部技術教育課指導主事 高橋雅信

目 次

I 視覚的な発見を通して三角関数のグラフの理解を深める指導	
1. 研究のねらい	2
2. 研究の内容・方法	2
3. 指導方法・教材の工夫	3
4. 学習指導計画	4
5. アンケート結果と分析	7
6. まとめと今後の課題	8
II 身近な事例を通して指数関数の考え方を理解させる指導	
1. 研究のねらい	9
2. 教材の工夫	9
3. 指導計画	10
4. 学習指導案	10
5. アンケート調査と結果	14
6. 考察と分析	14
7. まとめと今後の課題	15
III 図形的な立場から微分概念の理解を深める指導法の研究	
1. 研究のねらい	17
2. 微分法の指導法の史的考察	17
3. 接線に関する高校生の意識	18
4. 図形的な立場を意識した微分概念の指導法	19
5. 学習指導計画	21
6. 検証授業の結果及び考察並びに本研究の知見と指導への示唆	23
7. 今後の課題	24

I 視覚的な発見を通して三角関数のグラフの理解を深める指導

概 要

数学Ⅱ「三角関数の合成」の指導において、生徒に情報機器を活用させ、具体的な例を視覚的にとらえさせながら、主体的かつ発見的に学習できる教材および指導法の研究を行った。生徒は授業において、グラフの平行移動や拡大縮小が行われていることを視覚的に理解でき、その過程で習得したことを重視しながら、三角関数の合成および加法定理を自ら発見する喜びを感じることができた。また、三角関数の合成から加法定理を導いており、従来とは逆の指導方法となっている。

1. 研究のねらい

教育課程審議会の答申の中で、算数・数学科の改善の基本方針の一つに、「実生活における様々な事象との関連を考慮しつつ、ゆとりをもって自ら課題を見つけ、主体的に問題を解決する活動を通して学ぶことの楽しさや充実感を味わいながら学習をすすめることができるようにする。」とある。

本研究は、数Ⅱにおける「三角関数の合成」を取り上げた。この単元の授業内容は、加法定理から式の合成へと、式変形と問題演習に終始し、グラフとの関係は薄いのが現状である。

そこで、本研究のねらいは、一般角を動径の回転量ととらえてから、三角関数がグラフとしての概念をもつときに、三角関数の合成を、グラフを利用した視覚的な観点から理解できるように指導方法を工夫した。

そのために、生徒が試行錯誤しながらも主体的な学習活動を行えるコンピュータを利用した教材を作成した。その教材を生徒が驚きをもって体験、観察し、コンピュータを操作する。そこで得られた事象を類推、考察することにより、生徒自らが、式の合成方法を発見し、合成の式変形に基づく加法定理を得られるような指導方法を研究した。

この活動を通して、生徒は様々な合成のグラフを描かせ、生徒がその作業の中で、三角関数の和が単純な \sin カーブになるのは特別な場合に限られることに気付かせる。また、グラフには周期や振幅があることを実感させ、曲線の美しさを堪能できることも大切と考えた。

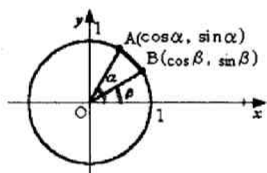
2. 研究の内容・方法

数学Ⅱ「三角関数」の学習の中で、視覚に訴え、生徒が発見する喜びを実感できる教材として「三角関数の合成」を扱うこととし、以下の手順で研究を行った。

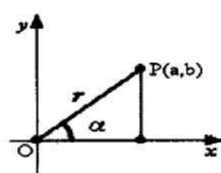
- (1) 数学Ⅱ「三角関数の合成」に関する現行の教科書における指導内容・方法に関して分析を行う。
- (2) 効果的なコンピュータソフト（Web上で公開されているソフトウェア）の選択とそのソフトの使い方を習得し、効果的な活用方法を考察する。
- (3) 指導計画、学習指導案、ワークシート、生徒向けアンケートを作成する。
- (4) 学習指導案、ワークシートに基づき研究授業を行う。
- (5) 研究授業後に学習内容の理解度について調査し、その結果から考察・評価を行う。

3. 指導方法・教材の工夫

現行の教科書の内容は、1節. 三角関数(一般角、三角関数の性質、グラフ) 2節. 三角関数の加法定理となっている。そして、加法定理の導入は、2つの角 α 、 β の正弦、余弦を利用した証明方法による。(図1)また、式の合成では、加法定理を変形して、合成の式を求めることができるとし、その証明に点P(a, b)をとる前提を受け入れさせている。(図2)



(図1)



(図2)

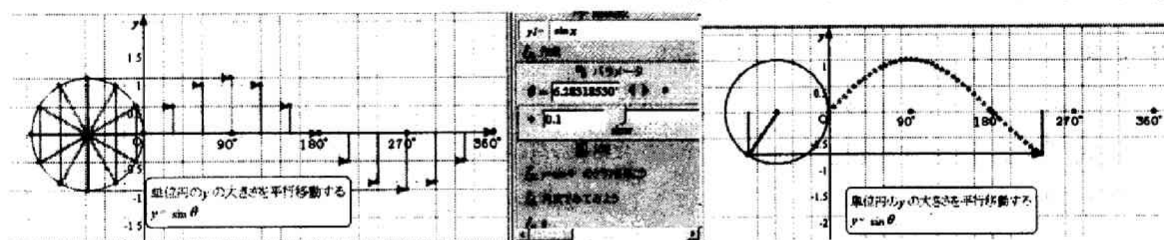
1節において、 θ を変数とした三角関数を、グラフを中心に学習する。2節に入ると、 θ が図1、図2のように指定された角 α 、 β として扱う。ここでグラフ的思考はない。1節の学習が、「グラフをかく」に終始してしまい、2節に続かない。この授業の流れに、生徒は、計算を主とする別分野の意識を強くもったり、 α 、 β を用いた理論的導入に苦手意識を募らせたりする。

- (1) 指導方法の工夫 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ の形状を考え、その波形の原型は $\sin \theta$ であり、 $\cos \theta$ であることを知る。 $a \sin \theta$ に $b \cos \theta$ を加えた場合、原型の $\sin \theta$ はどのように変化しているのか。 $b \cos \theta$ に $a \sin \theta$ を加えた場合、原型の $\cos \theta$ はどのように変化しているのか。1節で既習のグラフの移動を用いてグラフを重ねることで、この変化を知り、変化した式を探求する。その式の係数のそれぞれの関係を見出すことで、式の合成を導き出す。その式の変形から加法定理を求める。

- (2) 教材の工夫 上の指導方法を行う上で、関数グラフソフトGRAPESを利用した。

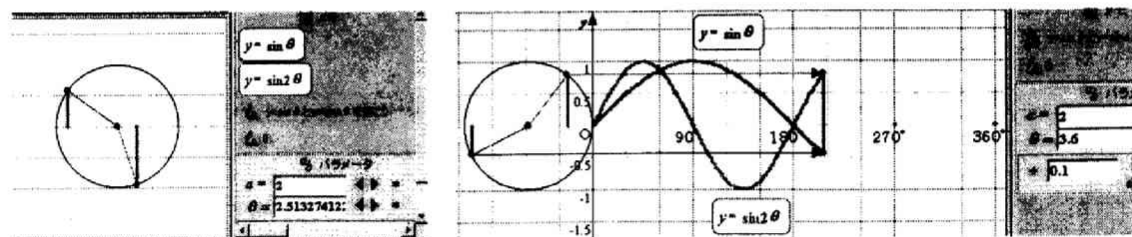
①一斉提示 教室においてモニターへ、ノートパソコンより提示する。基本事項の確認および、定義説明に利用した。説明を加えながらの提示のため、残像などの利用が効果的になるような、ファイルを作成する。

ファイル例1 $y = \sin \theta$ のグラフ



動径の回転に伴い、 $\sin \theta$ の値を示す長さの推移を示すのに、残像などを使用する。

ファイル例2 $a \theta$ は動径の回転速度を示す。



a の数値をかえ、動径の回転速度の意味を考えさせる。

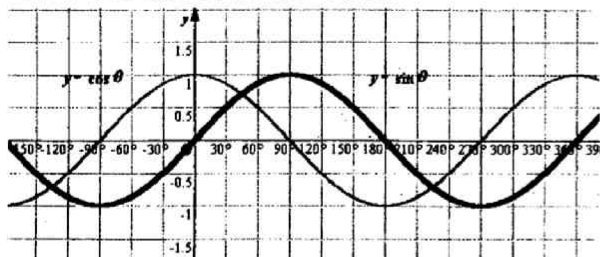
②個別操作 パソコン室において、教師提示モニター2人に1台、生徒用パソコン1人に1台。復習と操作の慣れをかねて、教室提示ファイルのパラメータ、スクリプト(簡単なプログラム)を実際に操作することにより、ワークシート中心の課題に取り組む準備をする。

ワークシート例

$a \sin \theta$ と $b \cos \theta$ の和を考えよう

課題0 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ は、どのようなグラフとなるだろうか。

(1) $y = \sin \theta + \cos \theta$ のグラフを描いてみよう。



(2) GRAPES 課題0を用いて、パラメータ a 、 b を動かしてみよう。どのようなことがわかるだろう。

課題1 GRAPES 課題1により、同じ移動をする式の組み合わせを探そう。

(1) $y = \sin \theta$ を元にして考えよう。

- b を大きくすると、 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ は【左、右】
- $y = a \sin \theta - b \cos \theta$ は【左、右】に動く。
- d を大きくすると、 $y = c \sin(\theta - d)$ は【左、右】
- $y = c \sin(\theta + d)$ は【左、右】に動く。

よって、同じ方向に動く組み合わせは、

$$\left\{ \begin{array}{l} y = a \sin \theta + b \cos \theta \\ y = \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = a \sin \theta - b \cos \theta \\ y = \end{array} \right.$$

(2) $y = \cos \theta$ を元にして考えよう。

- b を大きくすると、 $y = a \cos \theta + b \sin \theta$ は【左、右】
- $y = a \cos \theta - b \sin \theta$ は【左、右】に動く。
- d を大きくすると、 $y = c \cos(\theta - d)$ は【左、右】
- $y = c \cos(\theta + d)$ は【左、右】に動く。

よって、同じ方向に動く組み合わせは、

$$\left\{ \begin{array}{l} y = a \cos \theta + b \sin \theta \\ y = \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = a \cos \theta - b \sin \theta \\ y = \end{array} \right.$$

課題2 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$
 $y = c \sin(\theta + d)$ についてパラメータ a 、 b と c 、 d の関係を考えよう。
 GRAPES 課題2によって、 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ に、 $y = c \sin(\theta + d)$ が重なるときの c 、 d の値を探そう。

(1) $y = \sin \theta + \cos \theta$ $= \sin(\theta + \quad)$ $a = 1, b = 1 \Rightarrow c = \quad, d = \quad$	(3) $y = -5 \sin \theta + 12 \cos \theta$ $= \sin(\theta + \quad)$ $a = \quad, b = \quad \Rightarrow c = \quad, d = \quad$
(2) $y = \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$ $= \sin(\theta + \quad)$ $a = \quad, b = \quad \Rightarrow c = \quad, d = \quad$	(4) $y = -4 \sin \theta - 3 \cos \theta$ $= \sin(\theta + \quad)$ $a = \quad, b = \quad \Rightarrow c = \quad, d = \quad$

考察 a 、 b と c 、 d には、どのような関係があるのか考えよう。
 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$
 $y = c \sin(\theta + d)$

4. 学習指導計画

ア. 三角関数のグラフ 単位円の利用、周期、最大・最小値 (2時間)

イ. 三角関数のグラフの平行移動 周期の変化、最大・最小値の変化、(2時間)

ウ. 三角関数の合成と加法定理 (3時間) ①三角関数の和のグラフ

② $a \sin \theta \pm b \cos \theta$ 、 $c \sin(\theta \pm d)$ との関係

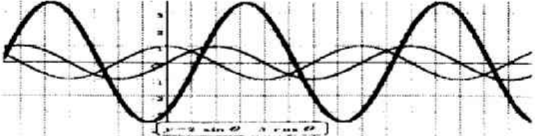
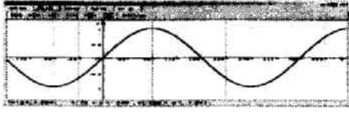
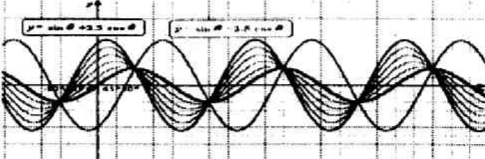
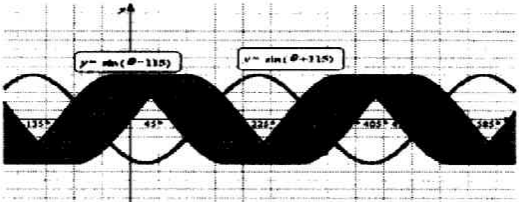
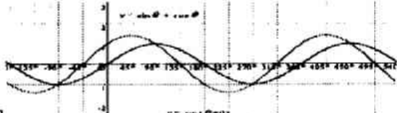
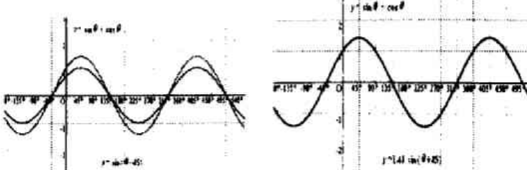
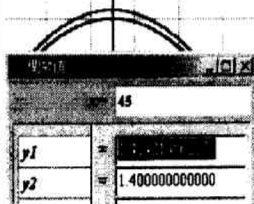
③ $a \cos \theta \pm b \sin \theta$ 、 $c \cos(\theta \pm d)$ との関係

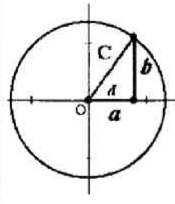
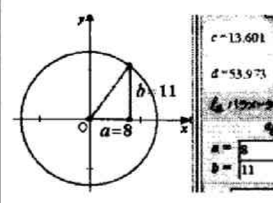
エ. 合成・加法定理の応用 (2時間)

(1) 学習指導案【指導計画ウの目標】

① $y = a \sin \theta$ と $y = b \cos \theta$ の和は $y = c \sin(\theta + \alpha)$ あるいは、 $y = c \cos(\theta + \alpha)$ で表されることが分かる。

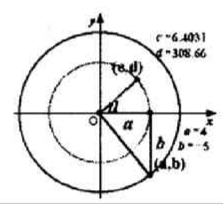
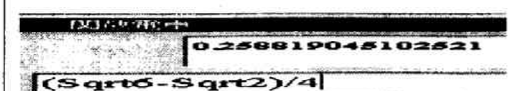
② パラメータとグラフの連動からパラメータ間の関係を導き、考察する。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点
確認	$Y = a \sin \theta + b \cos \theta$ のグラフが $c \sin \theta$ 、 $c \cos \theta$ を原形としていることを確認する。	GRAPESにより、 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ のパラメータ a 、 b を変化させ、 $y = c \sin \theta$ の平行移動となることを確かめる。 	線形性は保たれないことを確認。
導入	$\begin{cases} y = a \sin \theta + b \cos \theta \\ y = a \sin \theta - b \cos \theta \end{cases}$ の2式のパラメータ b による動きと $\begin{cases} y = c \sin(\theta - d) \\ y = c \sin(\theta + d) \end{cases}$ の2式のパラメータ d の連動関係を探る。 ※ 同様にして $\begin{cases} y = a \cos \theta + b \sin \theta \\ y = a \cos \theta - b \sin \theta \end{cases}$ $\begin{cases} y = c \cos(\theta - d) \\ y = c \cos(\theta + d) \end{cases}$ についても同様に関係を見る。 関連を探る。	GRAPSEにより $a = 1$ 、 $b = 0$ 、 $c = 1$ 、 $d = 0$  $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ 、 $y = a \sin \theta - b \cos \theta$ b で動かす。  $y = c \sin(\theta - d)$ 、 $y = c \sin(\theta + d)$ d で動かす。  $\begin{cases} y = a \sin \theta + b \cos \theta \\ y = c \sin(\theta + d) \end{cases}$ $\begin{cases} y = a \sin \theta - b \cos \theta \\ y = c \sin(\theta - d) \end{cases}$ $\begin{cases} y = a \cos \theta + b \sin \theta \\ y = c \cos(\theta - d) \end{cases}$ $\begin{cases} y = a \cos \theta - b \sin \theta \\ y = c \cos(\theta + d) \end{cases}$	グラフを用いて、 $y = a \sin \theta$ に、 $y = b \cos \theta$ を加える、という考えから、原型 $y = \sin \theta$ がどのように変化しているかを考察させていく。 移動の方向に注目させ、同じ方向へ移動する式を組み合わせる。 ※ $y = a \cos \theta$ に $y = b \sin \theta$ を加える、という考えから、原型 $y = \cos \theta$ がどのように変化しているかを考察させていく。 $-b = b'$ 、 $d = -d'$ で同値
展開	$y = c \sin(\theta + d)$ を動かし、 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ グラフと重なる c 、 d を見つける。 GRAPES のツール利用	$\begin{cases} y = a \sin \theta + b \cos \theta \\ y = c \sin(\theta + d) \end{cases}$ 課題1、課題2、課題3、課題4  a、b の入力 d の入力 c の入力 	b の取り扱いの楽な左式をまず、選ぶ。 ③領域のズームにより d の値を確認させる 必要に応じて、生徒のパソコン操作を補助する 

		$\begin{cases} y = a \cos \theta + b \sin \theta \\ y = c \cos(\theta - d) \end{cases}$ 課題 5、課題 6、課題 7、課題 8	
考察	パラメータ a 、 b と c 、 d の関係を考察する。 	ワークシートにより、まず、考える。 a 、 b 、 c 、 d の相互関係に気づき、 a 、 b から、 c 、 d を求める方法を考える  考察が正しいか GRAPSE により、検証してみる	a 、 b が既知であるとき c 、 d が課題のように得られた。パラメータは、3つの数値と1つの角度からなることから、円と動径に着目できるか。 a 、 b に任意な値を代入し、 c 、 d を三角比の表を用いて求め、GRAPES により確認する。
まとめ	練習 1. 2. 3. 4.	次の式を \sin で合成せよ。また \cos でも合成せよ。 ① $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ ② $-15 \sin \theta + 8 \cos \theta$ ③ $3 \cos \theta + 4 \sin \theta$ ④ $4 \cos \theta - 4 \sin \theta$	平面の点が、 $(x$ 座標、 y 座標)、 (r, θ) で示されることをまとめる。

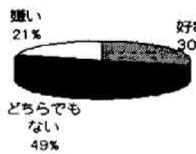
(2) 学習指導案【指導計画エの目標】

- ① 平面座標上の点を (X, Y) 、 (r, θ) の示し方があることを知り、定着を図る
- ② 合成の式から加法定理を導き出す。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点
導入	合成の式の定着確認 図形的意味を確認する。 平面の点が、 $(x$ 座標、 y 座標)のほかに、 (r, θ) で表せることを確認する。	$a \sin \theta \pm b \cos \theta = c \sin(\theta \pm d)$ $a \cos \theta \mp b \sin \theta = c \cos(\theta \pm d)$ 次の点をもう1つの方法で表せ。 ① $(6, 2\sqrt{3})$ ② $(-4, 3)$ ③ $(5, -5)$ ④ $(10, 120^\circ)$ ⑤ $(9, -135^\circ)$ ⑥ $(4, \theta)$ 但し $\dots \dots \frac{3}{5} \dots \dots \frac{4}{5}$ 次の式を \sin 、 \cos で合成せよ。練習 1、2、3、4、	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ d は数値だけでなく、三角関数で表す方法がある。 
展開	式変形により加法定理を導く 今度は、右辺から左辺への流れになる この便利さは、 θ 、 d に値を代入したとき・・・ 15° 、 75° の三角関数 $d = \theta$ 、 2θ ・・・2倍角・・・の三角関数が示せる。	$a \sin \theta + b \cos \theta = c \sin(\theta + d)$ 両辺を c で割る $\frac{a}{c} \sin \theta + \frac{b}{c} \cos \theta = \sin(\theta + d)$ $\cos d \sin \theta + \sin d \cos \theta = \sin(\theta + d)$ $\sin \theta \cos d + \cos \theta \sin d = \sin(\theta + d)$ 同様に、 $\sin(\theta \pm d) = \sin \theta \cos d \pm \cos \theta \sin d$ $\cos(\theta \pm d) = \cos \theta \cos d \mp \sin \theta \sin d$ 練習 次の θ についての三角関数を求めよ。 ① $\sin 15^\circ$ ② $\cos 75^\circ$ ④ $\sin(-75^\circ)$ ⑤ $\cos 2\alpha$ ⑥ $\sin 2\alpha$ ⑦ $\tan 2\alpha$	$\frac{a}{c} = \cos d$ 、 $\frac{b}{c} = \sin d$ 図形的意味を確認する 合成と逆の流れである
まとめ	GRAPES でそれぞれの値を確認する。一斉提示とすめる	関数電卓機能の利用 	$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0.258$

5. アンケート結果と分析

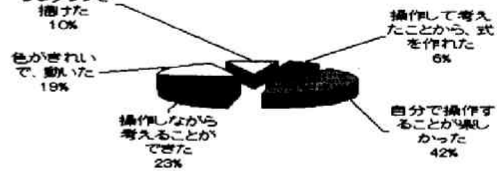
数学が好きですか



授業は興味を持ってましたか

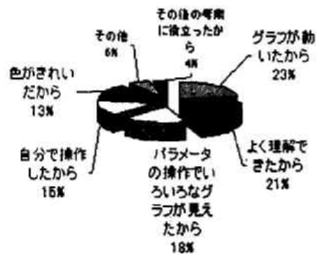


※興味をもてた理由



※最も印象に残る画面	割合
	31.5%
	13.9%
	21.3%
	17.6%
	12.0%
	3.7%

※印象の強い画面の理由



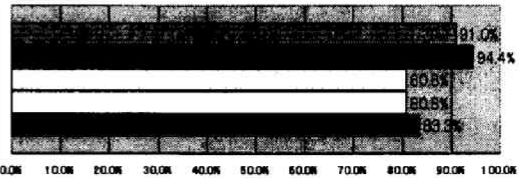
※興味を持てなかった理由



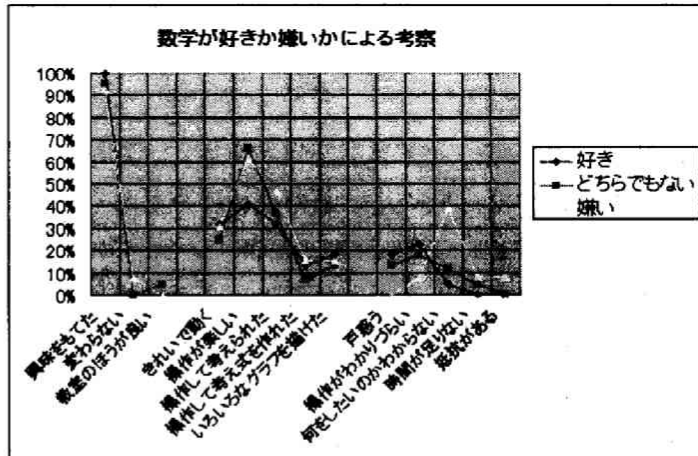
《表題の※は 複数回答を示す》

※確認テストと正解率

- $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ を \sin で合成せよ
- $y = a \sin \theta + b \cos \theta$ を \cos で合成せよ
- $\cos(\alpha + \beta)$ を展開せよ
- $\sin(\alpha + \beta)$ を展開せよ
- 座標平面上にある点を2通りで示せ



PCを用いた授業は、ほとんどの者が興味をもったとしている。その理由は、「操作が楽しい」がどの学習にも多いのは、全員が初めて体験するGRAPESを用いたため、興味・関心が高まったことが要因である。操作のほかに考えたり、式を見出したりすることを



挙げる生徒が、どの学習にも同じような割合でいた。また、数学で扱う内容の視覚化が理論構成の手助けとなり、座標点を、動径とそれが示す角度で表示するに至るまでの定着率は、確認テストが示すとおり非常に高かった。さらに、興味をもてない原因として、「目的が分からずに、ただ操作をしている」が、数学が嫌いな生徒に多い。これは、集中力を欠いたり、パソコン操作の戸惑いを理解のつまずきと混同してしまった生徒であると考えられる。この生徒たちには、教室での授業とコンピュータを活用した授業を混在させ、講義で学習した内容をコンピュータ操作で確認させることが効果的であると分かった。

“今まで授業を受けて、「生きていくうえで何の役にたつんだろう」と思っていた授業の内容が楽しくなってきた。グラフを見ていて、頭が混乱することもあったけれど数学の世界に触れて、物の考え方（視野）が広がった気がする。三角関数のグラフがあんなにも芸術的

でたくさんの形があったことを知って、正直驚いた。曲線がきれいで面白かった。“
授業後の生徒の言葉である。三角関数の美しさ、数学の世界にも触れられたようである。

6. まとめと今後の課題

数学Ⅱ「三角関数の合成」の学習は、使用する教科書によっては掲載されておらず、扱わない学校もある。年間授業時数や進捗の問題もあるが、加法定理になると節も変わり、グラフを主にして関数として学んできた学習が、数値計算に取って代るため、生徒にとって理解しづらくイメージがわからない内容であることも事実である。本研究では、加法定理を利用した式変形で合成の式を導くのではなく、2次関数から三角関数に至る平行移動・拡大縮小の知識を拠り所に、情報機器を効果的に活用し、視覚的にとらえ考察することで、合成の式を導き出す活動を主とする指導内容・方法・教材の工夫を行った。

また、研究の中で、関数グラフソフト『GRAPES』を使用した。 \sin 、 \cos 、 \tan のグラフの確認や平行移動、縦横方向への拡大縮小の授業から本ソフトを使用し、生徒がパソコン操作に慣れ親しむよう注意した。さらに、残像利用による拡大縮小を連続的に行う作業をさせたり、スクリプトを利用した“パラパラ”（単位円上の点を連続的に動かしてサインカーブを描く）を一斉提示したりすることにより、きれいな色と動く画面に生徒の口から感嘆の声が聞かれ、興味関心を引き出すことに成功した。研究授業では、生徒はパソコン操作に慣れていたため、主体的に問題解決する活動を通して学ぶことの楽しさや充実感を味わいながら学習を進めることができ、試行錯誤しながらも法則を見出し、充実感をもちながら、内容の確実な定着が得られたと思われる。

今後の課題としては、

- ① 生徒はディスプレイを注視し、個人作業と一斉授業とが分けづらい。パソコン教室のホワイトボードは、見にくいとの生徒の声もある。パソコン室のシステム、環境やパソコンの配置の工夫、習熟度別の展開での実施やチームティーチングが必要である。
- ② パソコン室で生徒を主体的に学習させるためには、ワークシートの工夫が必要不可欠である。穴埋め重視になると、生徒がパソコン操作にのみ終始し、自らが主体的に考察する意欲を導き出せないで終わってしまう。生徒の実態を把握し、自由度のあるワークシートの作成が必要である。
- ③ 今回の研究から、関数グラフソフト『GRAPES』は非常に有用なデバイスであることがわかったので、数Ⅰの2次関数はもとより、数Ⅱの複素数平面、数Ⅲの分数関数、無理関数、微分、積分、数Ⅳの2次曲線など、生徒が視覚的にとらえながら、主体的に学習できる教材の作成や、指導方法の研究に携わっていきたい。

<参考文献・引用>

- ・ 友田勝久著 関数グラフソフト GRAPES パーフェクトガイド 文英堂
- ・ <http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/>
- ・ 指導資料 高校数学Ⅱ (東京書籍・啓林館・第一学習社・実教出版 等)
- ・ 東京都教育庁指導部 新学習指導要領に関する資料 (平成12年3月)

Ⅱ 身近な事例を通して指数関数の考え方を理解させる指導

概要

数学Ⅱの指数関数・対数関数における「指数関数とそのグラフ」の指導において、生徒が今まで学んできた指数の内容を利用し、身の回りに存在する身近な題材として内緒話の事例を活用することによって、指数的に数が増えたときに、膨大な数になることを認識させた。また、生徒は照度計を活用した実験を通して指数関数を作り、その特徴や性質を発見させる指導を行った。その結果、生徒は実験から関数の変化を視覚的にとらえることができた。さらに生徒の理解度に応じたワークシートの作成と指導の工夫を図った。

1. 研究のねらい

私たちの身のまわりには、バクテリアの増殖、放射性元素の崩壊、地震のエネルギー、12平均律音階、オウム貝等の成長、人口増加、複利計算など、指数関数で表される自然現象、社会現象は多い。東京都立高校学校教育課程編成基準・資料（平成13年3月）は、数学Ⅱの目標と関連して「…具体的な事象の考察を通して数学的に処理する能力を伸ばし、それらを活用する態度を育てる。」と述べている。これは、具体的な事例を取り入れて学習指導を進めることの重要性を指摘したものである。さらに、身近な事例の考察を通して学習を進めることは、数式等の形式的な処理・操作が中心となる高等学校数学の学習において、生徒の学習に対する興味・関心を喚起し、学習内容の理解を深めることに役立つと考えられる。

本研究では、その立場から指数関数の学習指導を検討する。様々な事例の検討の中から、内緒話の伝わり方と光の性質を「指数関数とそのグラフ」の学習での導入課題として取りあげることにした。この題材の教材化を行うことが本研究のねらいである。

2. 教材の工夫

生徒の興味・関心は、題材が有する身近さの程度と密接に関わっている。また、学習内容の理解を深めていくためには、作業用のワークシートの工夫も欠かせない。本研究ではこの2点から教材化の検討を行った。

具体的な事例を考察する場合、変数の定義域が制限されることは避けられない。学習指導の立場からは、定義域は広い方が望ましい。しかし、これにこだわりすぎると、題材の身近さが損なわれてしまう。したがって本研究では、得られた指数関数については、その事例固有の制限とは関係なく、実数全体で定義される関数として考察することにした。

内緒話の例では、底が1より大きい指数関数の変化の速さに具体的なイメージがもてるように配慮した。内緒話の伝え方に工夫を加えることで、内緒話を知る人の総数が指数関数となるようにしたうえで、その総数がクラス・学校の生徒数から地球の全人口に達するまでの時間を予想するという活動を取り入れた。また、光の性質の例では、物質を透過する光の明るさの変化の測定実験を通して数学的な活動を体験すること、そして、この活動を通して1より大きい底の指数関数をもつグラフの特徴と、底の違いによる変化の速さの相違を体験

より大きい底の指数関数をもつグラフの特徴と、底の違いによる変化の速さの相違を体験できるように配慮した。

実験は、透明な3.5インチフロッピーディスクケースを重ねたものを海水に見立てて行った。教卓上での模擬実験で進めたが、実験への生徒の関わり方には配慮した。実験の精度にもよるが、ケース1枚ごとに、光の明るさは0.87倍程度になる。測定値では指数関数にはならないので、データ処理の仕方には工夫を加えた。実験のデータ範囲で作成したグラフは、底の大きさから直線とほとんど区別がつかないので、定義域を広げたグラフを生徒に提示した。

3. 指導計画

- | | |
|--------------------------|------------|
| 第1時限 導入、倍々と広がる内緒話 (検証授業) | 第4時限 指数方程式 |
| 第2時限 指数関数のグラフと性質 (検証授業) | 第5時限 指数不等式 |
| 第3時限 累乗根の大小比較 | |

4. 学習指導案

指導案Ⅰ 指導目標：具体的な事例を通して、 x と y との数量関係を調べることにより底 a の値を求め、指数関数 $y = a^x$ のグラフを描かせその形を理解させる。(ワークシート1を使用)

時間	指導内容	学習活動	指導上の留意点
導入 5分	前時までの復習	指数が0や負の整数、そして有理数にまで拡張しても指数法則が成り立つことを確認する。	負の整数の場合に分数になることを確認させる。
展 開	指数関数 $y = a^x$ を定義する。 (例1)の内緒話について提示する。 時間から話を知る人数を求める。 具体的な人数に対する伝わる時間を求める。 さらに、多人数に対する伝わる時間を予想させる。 対応表より x と y の関係式を求める。 予想が正しかったかど	$a \neq 1$ のもとで定義され、 x と y の関係が指数の形で表されていることを理解する。また a を「底」ということを示す。 内緒話の話の伝わり方を理解する。 時間 $x \times 10$ (分) と人数 y (人) との対応表を作成する。 クラス全員、T高校全校生徒に伝わる時間を対応表を用いて求める。 対応表の様子から多人数に対する具体的な時間を予想する。 指数関数 $y = a^x$ の関係になっていることを理解し、底の値が2であることを発見する。 短い時間で瞬く間に話が伝わることを発見する。	$a = 1$ 場合は定数関数 $y = 1$ であるので指数関数にならないことに注意する。 内容を理解しているか。 計算ミスをせずに正確に数値を求めることができるか。 対応表の関係を正確に理解しているか。 y の値が2倍ずつ増えていることで指数関数の式が導き出せるか。 指数関数の具体的なイメ

展	うかを確認する。 $y = 2^x$ のグラフを作成する。	$y = 2^x$ の x と y の対応表を作成する。	ージが身についたか。 負の指数の計算は正確にできるか。
開	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを作成する。	対応表から点 (x, y) を座標平面上にプロットしグラフを作成する。 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ であることに注意してグラフを作成する。	なめらかな曲線で点をつなぐことを強調する。 指数関数の具体的な性質については触れない。
40分			
結論	指数関数のグラフの形を確認する。	指数関数のグラフの様子から、 x が増加すると y は急激に増加することを確認する。	
5分			

指導案Ⅱ 指導目標：光の性質を利用した実験を通して指数関数の特徴・性質を理解する。
(ワークシート2を使用)

時間	指導内容	学習活動	指導上の留意点
導入 5分	前時までの復習	$y = 2^x$ のグラフの形、特徴について発問等により確認する。	グラフのイメージがつかめているか確認させる。
展	指数関数の事例について提示する。 (例2)の光の性質について提示する。	指数関数が身近なところで様々に利用されていることを発見する。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p style="text-align: center;">光の性質</p> <p style="text-align: center;">光は水深が1m浅く(深く)なるごとに一定数倍明るく(暗く)なる</p> </div>	具体的な事例を示すことでグラフの形、特徴と関連付けさせる。
開	実験の説明を行う。 明るさの測定 y の値と y の比を計算する。 計算によって得られた明るさの比率を底とする指数関数のグラフを作成する。 測定値の範囲を広げたグラフを提示する。	実験の内容を正確に理解する。 水深0~10mでの明るさを照度計で測定し、測定値をワークシートに記入する。 水深5m($x=0$)での明るさ($y=1$)を基準とした明るさ(y の値)を求める。さらに明るさ(y の値)の比率を求める。 対応表から点 (x, y) を座標平面上にプロットしグラフを作成する。 作成したグラフが曲線の一部であることを理解する。	代表生徒に測定させ、全員がビデオ映像により測定値を確認させる。 電卓を用いて各自計算させる。 ほぼ直線になってしまうことを確認させる。
40分			
結論	指数関数のグラフの性質	作成したグラフより指数関数の性質についてまとめる。	
5分			

ワークシート1 指数関数とそのグラフ

2年 組 番氏名 _____

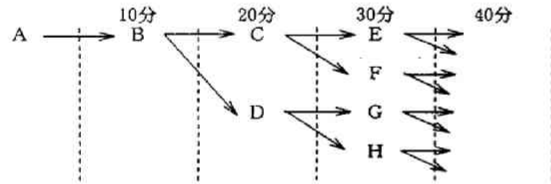
身の回りには指数関数で表される現象がいろいろあります。今日は指数関数の特徴とそのグラフについて勉強していきましょう。

指数関数・・・ $a \neq 1$ となる正の定数とするとき、 $y = a^x$ で表される関数、 a を という。

(例1) 内緒話はおそろしい(?)

都立T高校2年5組のAさんは、おもしろい話をもって朝8時30分に登校しました。Aさんはその話を、クラスのBさんだけに「内緒だよ」と言って伝えました。それに、10分かかったとします。つまりAさんが学校に着いてから10分後、すなわち8時40分はこの話を知る生徒は、AさんとBさんの2人だけというわけです。
ところがBさんはクラスのCさん、Dさんに話をしてしまいました。同様にCさんは、Eさん、Fさんに、DさんはGさん、Hさんに話をしました。
この後も2人ずつに内緒話が伝わり続けるとすれば、どのような結果になるのでしょうか。話を伝えるのにかかる時間を10分として考えてみましょう。

問1. 次の()の中に適する数字を入れなさい。



話を知る人数 (1)人 (2)人 ()人 ()人 ()人

問2. Aさんが話をしてから時間 $x \times 10$ (分)と、その時間までに話を知る人数 y との関係を表にまとめなさい。

$x \times 10$ (分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
y (人)	1	2										...

問3. 次の場合について、話が伝わるのは何分後か。(上の表を見て考えよう。)

- (1) このクラス全員(40人)に伝わる。 分後
- (2) T高校全校生徒(720人)に伝わる。 分後

問4. 次の場合について、話が伝わるのは何分後か? 予想してみよう。

- (1) 江戸川区民(約62万人)に伝わる。
ア 150分(2時間半) イ 210分(3時間半) ウ 330分(5時間半)
- (2) 東京都民(約1206万人)に伝わる。
ア 240分(4時間) イ 480分(8時間) ウ 720分(半日)くらい
- (3) 日本国民(約1億2700万人)に伝わる。
ア 270分(4時間半) イ 720分(半日) ウ 1日くらい
- (4) 世界人口(約60億5500万人)に伝わる。
ア 330分(5時間半) イ 600分(10時間) ウ 1日 エ 1週間くらい

問5. 問2の表より、 x と y の関係を式に表しなさい。



問6. 2^x の値は下表のようになっています。問4の予想は正しかったでしょうか。

x	2^x	x	2^x	x	2^x	x	2^x	x	2^x
1	2	8	256	15	32,768	22	4,194,304	29	536,870,912
2	4	9	512	16	65,536	23	8,388,608	30	1,073,741,824
3	8	10	1,024	17	131,072	24	16,777,216	31	2,147,483,648
4	16	11	2,048	18	262,144	25	33,554,432	32	4,294,967,296
5	32	12	4,096	19	524,288	26	67,108,864	33	8,589,934,592
6	64	13	8,192	20	1,048,576	27	134,217,728	34	17,179,869,184
7	128	14	16,384	21	2,097,152	28	268,435,456	35	34,359,738,368

問7. 指数関数 $y = 2^x$ について下の表を完成させなさい。

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y = 2^x$...			2^{-2} 	2^{-1} $\frac{1}{2}$		2	4	8	16	...

問8. 問7の表を用いて、指数関数 $y = 2^x$ のグラフを配布された用紙に書きなさい。

問9. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ に注意して、 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを書きなさい。

ワークシート2 指数関数とそのグラフ

指数は私たちの日常生活に身近に存在し、いろいろところで役に立っています。
 例えば、生物で学習したウニやかえるの細胞分裂は指数関数で表されます。また複利計算や
 オウム貝の成長、音階の作られ方など指数関数で表すことのできるものごとく身近にあります。
 そこで次のような例を考えてみましょう。

(例2) 自然界に目を向けてみよう！

海の中には、地上とは別世界の静かな美しい世界が広がっています。
 若者に人気のあるダイビング。ライセンスをとるために初心者のダイバーは、水深5m程度
 のところで講習を行うそうです。そこから上を見ると、太陽が海面の向こうに見え、下を見ると、
 深く暗くなっています。つまり光は、深くなればなるほど弱くなります。

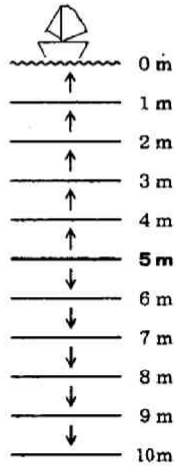
光の性質：光は水深が1m 深くなる ごとに一定倍率 明るくなる。
 " " 深くなる " " 暗くなる。

この光の性質を利用して、光の明るさは深さによって実際にどのように変化するか調べてみ
 ましょう。今、海の水をフロッピーディスクに見立て、次のような実験を行ってみましょう。

- 実験 ①透明なフロッピーディスク1枚を水深1m分の海水と見立て、水深0mから
 水深10mまでの明るさを照度計を使って測る。
 (照度計…照らされている面の明るさを測るもので、単位はlx(ルクス))
- ②水深5m(FD5枚分)での明るさを基準(深さ $x=0$, 明るさ $y=1$)とした
 とき、水深0mから10mまでの明るさを求める。

ア) 測定表

水深(m)	明るさ	x	y	yの比
0		5		
1		4		
2		3		
3		2		
4		1		
5		0	1	
6		-1		
7		-2		
8		-3		
9		-4		
10		-5		



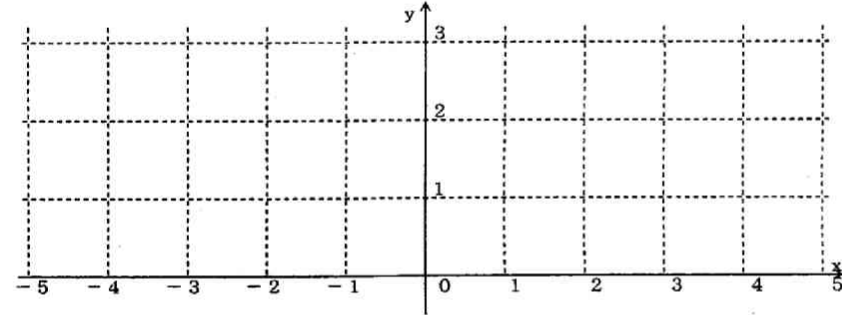
イ) yの値をそれぞれ求めよ。
 (電卓を用いて小数第3位を四捨五入し小数第2位まで求める。)

問1. ア)の表のyの(上の値)÷(下の値)を計算することにより、yの比を求めよ。
 (電卓を用いて小数第3位を四捨五入し小数第2位まで求める)

問2. 問1で求めたyの比の平均を求めよ。
 (電卓を用いて小数第3位を四捨五入し小数第2位まで求める。) 答 _____

問3. x(水深5mを基準としたときの深さ)とy(明るさ)とyの比の3つの関係は、どのよう
 になっているかを式に表しなさい。

問4. ア)の表で求めたx, yの値を用いて問3の指数関数のグラフの概形を書きなさい。



問5. 指数関数のグラフの特徴をまとめましょう。□の中に適する数字、文字、語句等を入れ
 なさい。

指数関数 $y = a^x$ ($a > 1$) のグラフは、次のような性質を持っている。

(1) 2点 (0 □), (1, a) を通る。

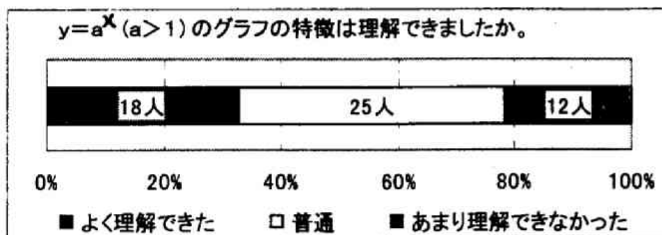
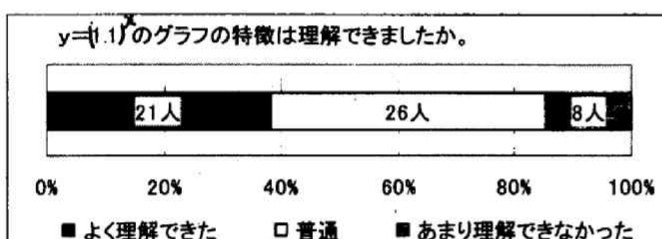
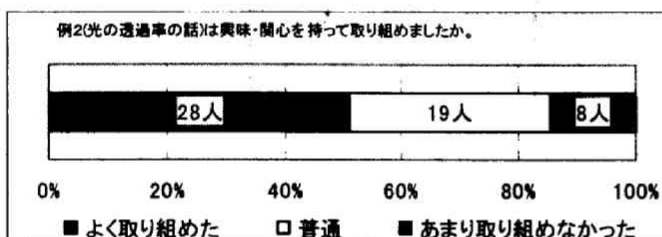
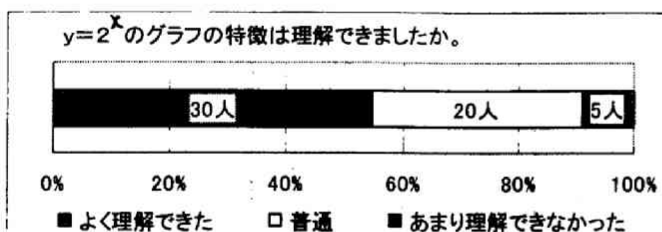
(2) $y > 0$ の範囲にある。

(3) □ 軸を漸近線とする。

(4) xが増加するとyは □ する。

5. アンケート調査と結果

アンケート調査は、全日制普通科2校の第2学年で実施し、有効回答数は55名であった。アンケートの設問及び回答結果は次のとおりである。



- 授業(指数関数のグラフ)についての感想(自由記述)
- ・プリントを配ってくれるとすごくうれしい。
 - ・いつもと違う授業ができて楽しかった。
 - ・ビデオを使って楽しかったです。
 - ・数学で実験とかをやったことがなかったのでおもしろかったしわかりやすく理解しやすかった。
 - ・指数関数のグラフの特徴が完璧に理解できていないけど、グラフを書いてみたら分かった気がします。
 - ・グラフは書くのが好きだからたくさんやってもいい。だいたい指数関数の特徴は分かってきた。
 - ・他のものにも指数関数が使われていることがよく分かった。
 - ・グラフが増えたり、種類が増えたらわかりにくくなりそう。
 - ・小数点とかが出てくるとややこしくなってわかんなくなってしまう。
 - ・グラフについていけなかったの、分かるような分からないようなという曖昧な感じです。

6. 考察と分析

検証授業は都立A高等学校全日制課程普通科2年生の1クラス(少人数展開クラス26名)で実施した。指導案I及びIIについて順に考察と分析を行う。

指導案Iでは内緒話を知る人の総数が、倍々と増えていくというなじみやすい例であったため、 $y=2^x$ の関係式を見出すのは容易であった。

特に、内緒話が伝わるのに要する時間を予想する問題では生徒は興味をもって取り組ん

でいた。xの値が大きくなるにつれ、yの値の桁数を間違える生徒が若干名いたが、これは、日常的に大きな数を扱っていないことと、3桁ごとにふってあるカンマ(,)に慣れていないことに起因するものと考えられる。

また、 $y = 2^x$ の値を計算する問題では、2の0乗が1であることはほとんどの生徒が覚えていたが、負の指数の計算ではとまどいを見せる生徒もいた。このことは、負の指数の計算が完全に定着していないことを示しており、今後の課題である。

さらに、 $y = 2^x$ のグラフを描く問題では、 $1/2$ 、 $1/4$ のような分数になっている点をグラフにプロットできない生徒がいたので個々に対応する必要があると考える。

次に、指導案Ⅱの光の性質を利用した実験では、生徒の理解をより深めるために、次の①～③の説明を具体的に行った。

- ①光の性質…光は水深が1 m浅く(深く)なるごとに一定数倍明るく(暗く)なる
- ②透明なフロッピーディスク・ケースを重ねたものを海水に見立て、ケース1枚を水深1 mと考える。
- ③照度計…照らされている面の明るさを測るもので、単位は(ルクス)

検証授業では、照度計によりケースを透過した光の照度を代表の生徒に測定させ、照度計の測定値はそのビデオ画像を教室内のディスプレイに提示することにより生徒全員に確認させた。そして各自電卓を用意させ、ワークシートに記入した測定値をもとに明るさの比率の計算をさせた。普段の授業ではあまり体験できないビデオ映像を利用した実験や電卓による計算作業を通して、生徒は興味・関心を持って熱心に取り組んでいたことがアンケートの結果からもわかる。

しかし、計算によって得られた明るさの比率を底にした指数関数のグラフを取り扱う際には留意すべきことがある。

- ①底が小数となるため生徒にとってはわかりづらいものになってしまうこと。
 - ②底が1に近い値のため測定値の範囲で作成したグラフがほぼ直線であると生徒が判断してしまうこと。
- の2点である。

このようなことは自然界の事象をそのまま取り扱う限りは避けられないことである。②については、測定値の範囲を広げたグラフを生徒に提示することにより、曲線の一部であることを確認した。

7. まとめと今後の課題

検証授業は、生徒の教室移動に多少の時間をかけてしまったため、十分な時間を確保できない中で進めることになった。そのような状況であったことを前提に、生徒のアンケート結果も含めて、2つの事例について、教材としての評価・問題点を明らかにしたい。

まず、興味・関心についてのアンケートの結果からは、実験・作業を取り入れたことが、生徒の興味・関心を喚起することに役立っているということを読み取ることができる。それは、生徒の授業の感想からも推察できる。作業用のワークシートについては、授業での生徒の様子から察すると、実験・作業を円滑に進めることに役立っていたと感じている。しかし、

グラフの理解についてのアンケート結果を見ると、 $y=2^x$ に対する感想と $y=(1.1)^x$ に対する感想とでは、結果に差が見られた。「よく理解できた」という回答と「普通」という回答をあわせた人数に関しては、両者に大きな差は見られないが、「よく理解できた」という回答数には、9人の差が見られた。この差は、底として小数を扱うことに生徒が慣れていないことが原因の1つと考えられる。また、このことは生徒の授業での様子・感想からもうかがえる。

身の回りには、指数関数で表される様々な現象があることは初めに述べたが、事例を検討する中で実感したことは、実際に教材として取り入れるためにはかなりの工夫が必要であるということである。本研究では、内緒話の伝わり方と光の性質を事例として選択したが、それらは、指数関数のグラフのイメージをもつための題材としては、効果的な教材であったと思う。両事例ともまだまだ問題点はあるが、それについては今後の検討課題としたい。

最後になるが、今回の研究を通して、身近な事例を通して学習活動を進めることは、生徒にとって大切な活動になるということを実感している。今後も、このような活動を通して、生徒が数学をより身近に感じられるような教材とその指導方法についての工夫を行っていきたいと考えている。

参考文献

- ・新編数学Ⅱ 藤田宏著 東京書籍 1999
- ・平成8年度教育研究員報告書 数学 東京都教育委員会
- ・平成12年度教育研究員報告書 数学 東京都教育委員会
- ・指数 対数のし・く・み 江藤邦彦著 三省堂 1999
- ・平成12年国勢調査(全国都道府県市区町村人口) 総務庁統計局
- ・テクノロジーを活用した新しい数学教育 佐伯明彦 明治図書 1997
- ・パズルで鍛える数学力 Y. ペレルマン 白揚社 2000

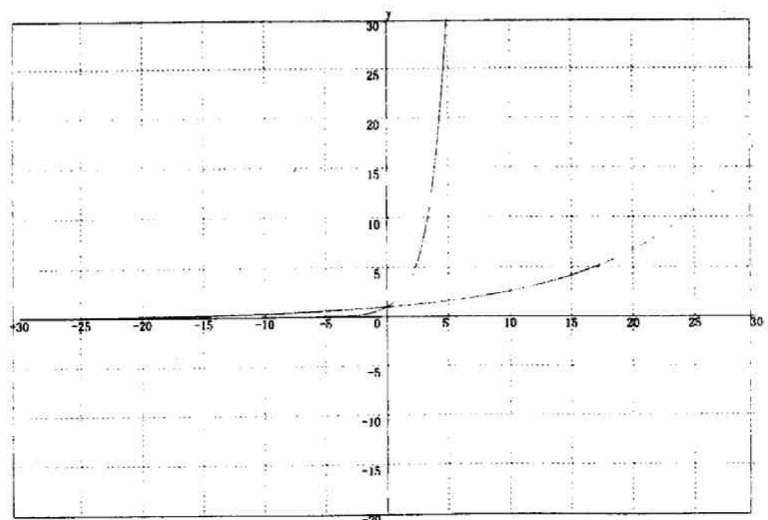
実験機材

- ・デジタル照度計 ANA-F11(東京光電(株)) ・3.5インチフロッピーケース
- ・ビデオカメラおよび三脚 ・モニター ・光源

参考図

$y=2^x$ のグラフと

$y=(1.1)^x$ のグラフ



Ⅲ 図形的な立場から微分概念の理解を深める指導法の研究

概要

数学Ⅱの指導における微分法の導入において、接線の考え方に「1点を共有する直線」であり、かつ「曲線と接線が接点のごく近くで同じ（直線）とみなせる」という新しい考え方を導入し、接線を利用した図形的な操作的活動を行うことによって、導関数と元の関数との関係を推察する指導方法を研究した。結果として、変化率や極限の概念を取り入れることなく、生徒たちは自然な形で微分概念を深めることができた。

1. 研究のねらい

平成15年の高等学校の新学習指導要領実施を直前にして、学校週5日制が完全実施されるにあたり、理数教科の指導内容の厳選が行われた。このような改訂の中でも、高等学校数学科における指導の最終目標として微分・積分は、削除されることなく残されることになっている。このような状況において、より限られた時間数の中で、より分かりやすい指導法の在り方が求められることは課題の一つであると考えられる。

現在の数学Ⅱの指導において微分法の導入における指導法の多くは、関数のグラフの平均変化率から変化率（微分係数）の考えを導入し、極限値の考えと合わせて、導関数の概念を導き出すアプローチと平均の速さから瞬間の速さへ至るアプローチによるものが一般的であった。しかし、ライブニッツ流の数学的なアプローチの場合、極限の考え方や新しい記号の定義など、多くの新しい概念の導入を行わなければならないため、変化率や導関数の考えに至るまでに、生徒たちがつまずいたりしてしまい、微分計算も形式的な処理をしてしまっていることが多かったように思われる。

一方で、微分係数の図形的な意味として関数の増減を調べるために初めて「接線」の定義を取り扱うことも多いと思われる。しかし、「接線」の取り扱い、中学校数学科における図形の単元である円と直線の関係において3年生で取り扱われることが最初の場面である。さらに、高等学校における「接線」に関する概念は、「共有点」としての数学Ⅰの2次関数や数学Ⅱの図形と方程式で取り扱われているだけで、「接線」の正確な定義はここまでで行われていない。そのため、生徒たちのもつ「接すること」に関するイメージもまちまちになっていると考えられる。接線は、身近に取り扱える題材であり、円と直線の関係の学習は、中学校の新学習指導要領では、中学校3年から中学校1年に移行されることになった。接線概念の定着化は重要なことであると思われる。

そこで、本研究の目的は、数学Ⅱにおける微分法の導入にあたり、接線の考え方をとらえなおし、接線の特徴的な関係から、導関数を導き出すことを目的とする。これによって、接線から得られる導関数と元の関数のグラフとの関係のいくつかを考察することより、操作的な活動の中から、微分法の関係式を作り出すことの指導法を提案する。

2. 微分法の指導法の史的考察

微分法に関する研究は、非常に多い。これは、高等学校数学科における指導の中核の一つ

として微分法と積分法が位置付けられているからではないかと考える。その多くは、高等学校における指導と大学における指導との接続などに関するものやパーソナルコンピュータを利用したもの、歴史的な背景などからの指導などに関するものなどが多く、生徒の概念の認知面や教材開発的な側面に関するものはあまり多くないように思われる。一方で、極限状態における接線の状況を実際に視覚的に確認させて赤い糸を利用した「速度計」と呼ぶ接線の傾きの測定教具を自作し、実際に読み取らせる指導から物理と数学との関連性を図ったもので、大変有効である。しかし、その測定教具の製作は手間を要すが、接線の傾きは、紙を折る操作や定規による測定などで比較的容易に行うことができるもので有効であろう。しかし、これまでの先行研究は、1970年代から1980年代の終わりまでのものが多いので、教育課程の差異による接線に関するイメージの違いも現在の生徒にはあるのではないかと考えられる。そこで、接線に関する現在の生徒の知識は、どのようなものになっているかについて次に考察する。

3. 接線に関する高校生の意識

ここでは、検証授業を行った高等学校の生徒における接線のイメージに関する調査結果について述べる。この目的は、授業を行うにあたりその指導法の在り方を考察することである。

(1) 調査概要

実施時期：平成13年6月下旬

対象生徒：検証授業実施予定東京都公立
高等学校2年生122名

調査方法：図1の質問紙調査方法による
なお、対象生徒は、数学Ⅱの図形と方程式の単元までは学習済みであった文系クラス80名、理系クラス40名である。
結果として91名の生徒からの回答を得た。

(2) 結果及び考察

質問紙調査の結果について図2に示す。

まず、「接する」に関連する用語としては、


数学に関するもの56件(35%)、一般的なもの23(14%)、日常生活に関わるもの77件(50%)の合計156件が述べられていた。この中において接線などの数学的用語の他、「接する」に関する生徒のイメージとしては、「(何かと)触れている」という印象を受けていることが大部分であると考えられる。また、「交わっている」、「つながっている」という印象に関するものである。これは、間違った考え方が生じる問題点の一つであると考えられる。

次に円、楕円、放物線、微分不可能な部分をもつ直線、3次関数について接線を自由に引かせた結果について述べる。まず、円や楕円については、大きな問題はない。これは、中学3年の円や図形と方程式などで既に学習済みだからであると思われる。しかし、一部

接線についてのアンケート

高校生のもっている自由な発想について調査しています。ご協力ください。

1. 「接する」と聞いて連想(関連)する言葉をたくさん書いてください。
2. 次の図形の接するように直線を引いてください。(好きなように)



3. 数学で習った、または見たことのある図形を描き、その図形に接線を引いてください。
4. 数学で習ったことのない図形を描き、その図形に接線を引いてください。
5. 接線を引くときに工夫した点は何ですか。

高校2年 _____ 組 文系・理系 男・女
数学は 得意・普通・苦手

図1 質問紙調査の内容

の生徒は、接線は縦あるいは横という意識の生徒もいた。しかし、これらの結果は放物線からは変わってくる。この高等学校では、放物線については、数学Iの2次関数の既習事項ではあるが、大半は頂点でなければならないイメージの生徒が多い。次に気になるのが、端点を気にしている生徒が多いことである。このことは、尖った場合についても現れ、多くの生徒は、微分不可能な場所に引いている。これは、「接線」が「触れている」というイメージに左右されているためではないかと思われる。3次関数での場合は、これらが複合的に現れた結果となっているように思われる。

以上の結果から、生徒たちのもつ「接すること」に関するイメージは、数学における「接線」や「接点」としてとらえられていることが多い。そして、その具体的なイメージは、「触れている」こととしてとらえられている。

さらに、多くの生徒たちのもつ「接すること」に関するイメージは、①接平面における接触点としてのイメージ、②他者との関わりに関するイメージ、③変曲点などを除く交わっていることやつながっていることなどに関する間違った考え方のイメージになっていることが多いと考えられる。

1. 接線: 17名、人に接する: 16名、接点: 12名、触れる: 12名、動物に接する: 12名、接辺(?): 6名、くっつく: 6名、触っている: 5名、円に接する: 4名、つながっている: 3名、触れあい: 3名、友達に接する: 3名、点と線が接する: 3名、以下省略

2.

3. は同じ概念の図形と見なす。

4.

17, 2, 8, 2, 3, 2, 6, 5, 10, 2, 2, 2, 1

5. 特になし : 29名
 接するように : 5名
 まっすぐになるように : 5名
 直観で : 3名

4. 図形的な立場を意識した微分概念の指導法

高校生にとって、接線のイメージは、曖昧な状態であることが明らかになった。そこで、まず、接線についての概念を定着させたい。ここでは、接線の考え方に「1点を共有する直線」でありかつ「曲線と接線が接点のごく近くで同じ(直線)とみなせる。」という新しい考え方を導入する。

接線は、接点の存在性と左方極限及び右方極限との一致による微分可能性から定義されているものがほとんどである。多くの辞典などでも1点を共有することは生徒も異議を唱えるところではないと考える。ここでは、第二の概念である「その接点と接線が接点のごく近くで同じ(直線)とみなせる。」ということを考えさせたい。このことは、極限を考えさせる意味でも重要なことである。

微分学では、大局から小局への見方と小局から大局への見方の2つの見方がある。図形的な概念としては、局所的に見るとどのようになっているかは、局面部分を顕微鏡で拡大してとらえたり、現在ならば、グラフィック電卓によってBOX機能で拡大し、局所的な見方をすることができる。このような、思考実験によって、「曲線と接線が接点のごく近くで同じ(直線)とみなせる。」と考えても問題はないと考えた。特に、変曲点などにおける接線の性質としても利用することが可能である。

一方で、曲線は微小な線分をつないだ折れ線グラフと考えるとらえ方もある。

この場合、曲線を逆の立場でとらえ、小局から大局へを見方をしていることに意義があるものと思われる。従って、高校生にそれまでの接線のイメージに「曲線と接線が接点のごく近くで同じ(直線)とみなせる。」という新しい考え方を導入した。

次に、接線をこの考え方でとらえたときに、接線を直接引いてみることを考えさせたい。これは作業的な操作的活動である。ここでは、2次関数、3次関数のグラフに限定してよい。色々な点において、どのようにすれば、単に1点で接するように引けるかを考察させる。具体的に接線を引くことで接線の傾きに対する新しい関数体系を導入することができる。これらの結果と「曲線と接線が接点のごく近くで同じ(直線)とみなせる。」という新しい考え方が同一視できることを理解させる。そして、最後にその結果を図3の考えによって理解させる。

このようにして、平均変化率や変化率、極限値の概念を直接的に扱うことなく、導関数をとらえることができ、

元の関数と導関数との関係について微分概念の意識付けをすることができると考えられる。

今までの先行研究では、直接、接線だけに着目して、その関数のグラフにアプローチする方法は報告されていない。そこで、この研究では、定規をあてるという操作を行い、曲線の1点を共有するただ一つの直線を引くことを試みる。コンピュータなどで正確に描かせた線の任意の点における直線の方程式を求め、導関数の式を導き出す方法を考えさせることができる。さらに、接線を先に意識しているので、関数の増減の指導も容易になり、3次関数のグラフの指導も行いやすくなると考えられる。この指導法における期待されることは、①曲線に対する接線を、操作活動を通じて正確に理解していくことができること②操作活動から得られた導関数の特徴をしっかりとらえられること③導関数と元の関数との関係付けができることの3点に集約されると考えられる。

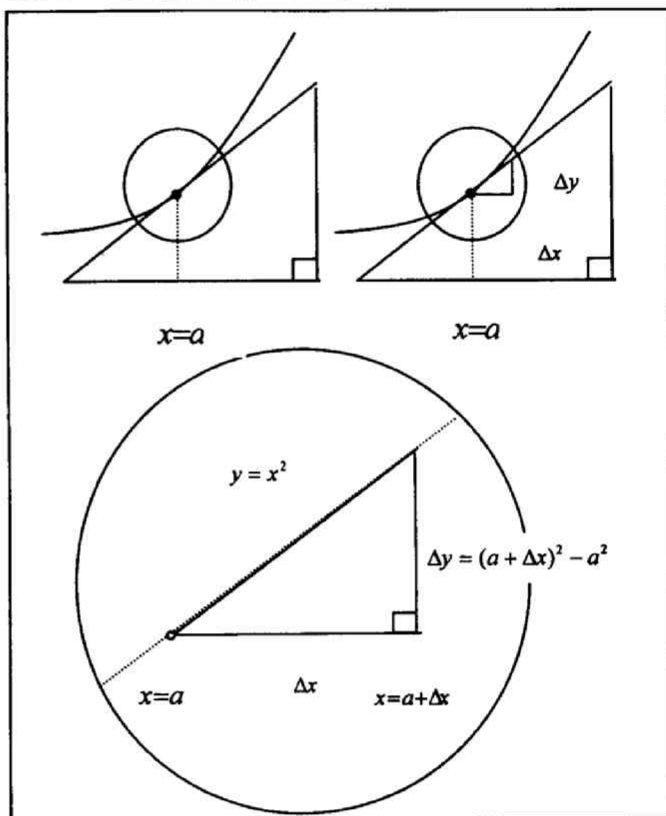


図3 微小線分の傾きのとらえ方

5. 学習指導計画

ここでは、図形的な立場を意識した微分法の具体的な学習指導計画について述べる。

(1) 指導目標

曲線上のごく近くが線分と見なせるとき、その線分の傾きを求める操作が微分であることから、そのための準備として、接線をとらえ直す。そして、接線から微分概念を導くことによって、微分概念の導入を視覚的にし、図形的な立場からイメージしやすいものとする。

(2) 学習指導計画

第1次 「接線のイメージのとらえ直し」

- ① 「接すること」とは、どのようなことか具体的に述べてさせる。
…発問によって、色々と意見を出させる。それらを黒板に列挙していく。
- ② 円、放物線、3次関数のグラフなどに接線を引かせる。
…黒板の半分（あるいは模造紙、TPなど）に指名して接線を引かせ、合わせて接線を引くときに注意した点を述べさせる。
- ③ 接線とは、どのようなものか性質を考えさせる。
…生徒は、日本語のイメージから「接線とは図形にくっついた直線のこと」という印象を多くの生徒がもっていると考えられる。そこで、円の接線の性質から、「ある図形（曲線）と直線が1点でのみくっつくとき、この直線は、その図形（曲線）に「接する」という。このときの点を「接点」、直線を「接線」ということを確認する。
- ④ ある曲線上の1点を中心として、その点の「ごくごく」近くを観察すると、曲線はどのように見えるかを考える。
…ノートに描かせた半円や自由曲線を拡大したもののある一部分だけを拡大した状態を用意し、線分に見えることを視覚的に確認する。地球規模の接線の状態についても考察させる。
- ⑤ 接線の性質を確認する。
…曲線上のある点（Aとする）のごくごく近くは線分と見なせること。その線分を延長させた直線は、点Aを接点とする接線と同じものであること。即ち、曲線上に1点を決めれば、その点のごく近くがどのような線分とみなせるかを調べ、その線分の両端を引き伸ばすことによって、点Aを接点とする接線を引くことができる。
- ⑥ まとめ
…数学的に「接線」とは、曲線と1点を共有する直線であり、接点のごく近くで、曲線と接線は同じものと見なすことができる2つの性質をもつ直線である。

第2次 「接線を求める作業」

- ① 関数 $y = x^2$ 、 $y = -\frac{1}{3}x^3$ 或いは、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 、 $y = \frac{1}{3}x^3$ のグラフを用意する。
…表計算などコンピュータで描かせたものとする。
- ② これらの関数のグラフに正確に接線を引かせるためにどうすればよいかを考えさせる。
…定規により、視覚的に接している状態を意識させる。

③ 学習活動

… 2次関数は $x = 4, 6, 8, 10, 12$ 、3次関数は $x = 6, 9, 12, 15, 18$ の与えられた点に接線を定規を用いて描く。そして、 x 軸の交点の座標を小数第1位まで読み取り記録する。電卓を利用して、接線の傾きを求める。これらの結果から、 x 座標毎の接線の傾きを求める。規則性を類推させる。

第3次 「導関数の導入」

- ① 前次の整理した結果を表にして、接線の傾きを y' として x と y' の関係を類推させる。

…なるべく、きれいな値で式化できるようにする。

- ② グループ討議

…気が付いたことを各グループに発表させる。

2次関数 $y = x^2$ の表す曲線の接線の傾き			
グループ名 _____			
グループ全員の氏名 _____			
x	y	接線と x 軸との交点の値	接線の傾き
4			
6			
8			
10			
12			

図4 ワークシート例
接線の傾きの計算方法

$\text{傾き} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{y \text{ の値} - 0}{x \text{ の値} - \text{接線と x 軸との交点の値}}$
--

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x, \quad y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y' = x, \quad y = \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow y' = x^2, \quad y = -\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow y' = -x^2$$

…時間的に余裕があれば、これらの関係から法則性について考察させる。さらに余裕がある場合、他の x の値について仮説の検証を行う。

- ③ 関数の曲線のグラフと接線の関係について整理する。

第4次 「導関数の導入」

- ① 「関数 $y = x^2$ 、 $y = x^3$ の任意の点における接線の傾きが接線の性質と前時までの実測結果と一致すること」を計算によって確かめる。

…直線の傾きは、 y の増分 (Δy) \div x の増分 (Δx) で表せる。

$y = x^2$ のときの $x = a$ における接線の傾きは、 $y' = 2 \times a = 2a$ と予想できた。

$y = x^2$ のときの $x = a$ における接線を考える。接点の近くでは、関数の微小線分としてみなすことができた。そして、この微小線分の傾きと接線の傾きが同じものだったので、 $x = a$ の近くでのこの微小線分の x の増分を (Δx)、 y の増分を (Δy) とすると、 $\Delta y = (a + \Delta x)^2 - a^2$ とおくことができる。従って、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} = \frac{2a\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x \rightarrow 2a \text{ を考えることにより、代数的}$$

に $y' = 2a$ であることを確認できる。

この授業計画においては、接線を初めから前面に押し出しており、平均変化率や極限の概念については、深入りしていない。接線の活動を通して、元の関数と導関数との関係について活動の中から十分に生徒自身で考察していくことが可能になると思われる。結果的には、同様の概念が含まれることになるが、接線を先に導入しているため、関数の増減に関する指導を限られた時間で指導していくことが容易になると思われる。

6. 教授実験の結果及び考察並びに本研究の知見と指導への示唆

検証授業は、東京都公立高等学校2年生文系クラス119名(3学級)に対して、平成13年11月上旬に全4時間計画で実施した。まず、接線に関するイメージは、「接する」、「触れている」、「くっつく」というイメージに束縛されていた。しかし、円の接線の様子などから交点となっている場合の問題点などを指摘でき、ある曲線上の1点を中心として、その点のごく近くを観察した場合の様子から曲線のごく一部分は直線と同一視できることはほとんど全員の生徒が容易に確認し、指摘することができた。さらに、検証授業では顕微鏡を用意し、硬貨の縁を×100倍と×200倍にしたときの様子も観察させたことで、より直線と見なせることを意識付けられたと考えられる。この場合、使用する硬貨はギサギサがなく、変形の少ない新品のものがよい。

次に、接線を求めて導関数を推察させる作業においては、作業方法を習熟させることにより、容易に求めることができるようになった。しかし、接点が、 x の値が大きくなった場合や次数が高い関数の場合共有部分が多く、視覚的に接点を見つけにくいことが多いため、結果に誤差を生じさせやすい。この場合、入射角と反射角の関係などの補足説明などにより、より適切な接点を探させる作業も必要になると考えられる。さらに、導関数の関係を推察させる場所は、作業結果に影響する。グループ討議をさせる場合、まず、より多くの生徒が選んだ読み取った値の中で一番多かった結果を利用し、各々の関数についてそれらの関係を推察させることが必要であろう。この場合、一番生徒が見付けやすかった関数は $y = x^2$ から $y' = 2x$ を見付けるものと、

$y = \frac{1}{2}x^2$ から $y' = x$ を見付けるも

のであった。3次関数の場合、平方数であることに気がつけば容易に解決できるが、36,81,144,225,324よりも誤差が出ている場合やこれらが平方数になっていることに気がつくことができなかつた場合、仮説の設定が困難とも思われる。従って、関数を $y = x^3$ 、 $y = x^4$ などとして求める場合は、一層の工夫が必要である。

次に、代数的な結果が正しいことを証明することは、一見すると通常の導関数の定義から極限計算をしていることと同じである。しかし、こ

こでは、それまでの過程で変化率や極限の概念を取り入れることなくアプローチしているので、生徒たちにとってより自然な形で結論を受け入れられたと考えられる。

検証授業終了後行ったアンケート結果について考察する。これは、図5によるアンケートを無記名方式で第3次の授業終了後実施した。結果として、113名からの回答を得た。分

授業についてのアンケート	
今日の授業(接線の傾きと元の関数の関係)について次の質問に答えて下さい。	
1. これまでの接線に関する授業について興味・関心をもって取り組みましたか?	
ア よく取り組めた	27名(24%)
イ 普通	53名(47%)
ウ あまり取り組めなかった	32名(29%)
2. 曲線にうまく接線を引けるようになりましたか?	
ア うまく引けるようになった	46名(41%)
イ 普通	40名(36%)
ウ あまり取り組めなかった	25名(23%)
3. x の値と接線の傾きに関係があることを発見できましたか?	
ア できた	30名(27%)
イ 何となくできた	41名(37%)
ウ あまりよく分からなかった	34名(30%)
エ 全く分からなかった	7名(6%)
4. $y = x^2$ と $y' = 2x$ の関係などが分かりましたか?	
ア はい	65名(61%)
イ いいえ	42名(39%)
5. 接線についてよく理解できましたか?	
ア よく理解できた	19名(17%)
イ 普通	66名(58%)
ウ あまり理解できなかった	28名(25%)
6. 接線を引くときに工夫した点について、自由に述べて下さい。	

図5 授業アンケート

析結果として、作業活動を多くしたことで、主体的に取り組んだ生徒が多くなった。これは、教師主導型で行われてきた導関数の導入に関し、接線を引くことで目的意識をもたせて生徒を意欲的にさせることを示唆しているといえよう。

一方で、測定結果の誤差のために仮説を立てる段階が一部の生徒にとって分かりにくかったようであった。従って、より正確に作業を行うことができるようにすることの必要性が示唆されると考えられる。

7. 今後の課題

本研究によって、多くの生徒は接線について改めて認識を深めることができ、導関数の指導を容易とすることができた。今後は、より正確に接線を求められること、思考を行いやすい関数及びグラフの工夫、生徒の問題解決過程のプロトコル分析などを個別に精緻していくことが必要であろう。

さらにこの指導法では、平均変化率の扱いや極限の扱い、導関数の定義式、微分法の線形性について取り扱ってない。従って、指導を行う適切な場面の模索が必要になると思われる。

<引用・参考文献>

- [1]栗田 稔.(1965). 微分学における平均値の定理の教育的意義. 日本数学教育学会誌, 47(5), 152-153.
- [2]松本博史、山上成美.(1991). 授業書<速度計>-教具・パソコンを利用した微分の導入-. 日本数学教育学会誌, 73(5), 138-147.
- [3]文部省.(1978). 中学校指導書 数学編. 大日本図書(株).
- [4]文部省.(1979). 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 実教出版(株).
- [5]文部省.(1989). 中学校指導書 数学編. 大阪書籍(株).
- [6]文部省.(1989). 高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編. (株)ぎょうせい.
- [7]文部省.(1999). 中学校学習指導要領(平成10年12月)解説 -数学編-. 大阪書籍(株).
- [8]文部省.(1999). 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 実教出版(株).
- [9]中村幸四郎.(1958). 大学教養課程の微分積分について. 日本数学教育学会誌, 40(3), 129-131.
- [10]岡部恒治.(2001). 高校の微分積分で伝えたいことは何か. 数学セミナー, 40(6). (株)日本評論社. 16-19.
- [11]杉田 孟.(1989). VTR・CAI 併用の学習指導-接線の指導-. 日本数学教育学会誌, 71(3), 43-56.
- [12]豊岡幸四郎、島田深雪、小川真一、川井正樹.(2000). 身近な事象を題材とした2次曲線の探究-感動を与える授業を求めて-. 平成12年度教育研究員報告書 数学. 東京都教育委員会. 2-8.
- [13]塚原久美子.(1999). 微分積分法の指導における数学史の活用とその有効性について. 日本数学教育学会誌, 81(5), 151-162.
- [14]矢野健太郎(編).(1976). 数学小事典. 共立出版(株). p.301-302.

平成13年度教育研究員研究報告書

〔東京都教育委員会印刷物登録
平成13年度 第41号〕

平成14年1月23日

編集・発行 東京都教職員研修センター
所在地 東京都目黒区目黒1-1-14
電話番号 03-5434-1976

印刷会社名 株式会社 ドゥ・アーバン