

高等学校

平成 14 年 度

# 教育研究員研究報告書

数	学
---	---

東京都教職員研修センター

平成14年度

教育研究員（数学）名簿

分科	研究テーマ	学校名	氏名
I	2次関数における関数概念の形成および理解を深める指導	都立世田谷工業高等学校	◎川島 香
		都立小金井北高等学校	澤 直 樹
		都立田無工業高等学校	宇佐美 俊 哉
II	数え上げる作業を通して、順列・組合せの区別が明確にできる力を培う指導	都立足立西高等学校	安 藤 直 美
		都立足立工業高等学校	○島 村 昇
		都立向島商業高等学校	三 浦 秀 行
III	表計算ソフトを用いて、「定積分と面積の関係」の理解を深める指導	都立中野工業高等学校	清 水 賢 二
		都立竹早高等学校	松 本 幸 博
		都立府中東高等学校	加 藤 義 彦

◎ 世話人

○ 副世話人

(担当) 東京都教職員研修センター 指導主事

江 本 敏 男

# 目 次

## 主題 基礎・基本の確実な定着を図り、自ら学ぶ意欲を育てる 教材・指導方法及び評価の工夫

I	主題設定の理由	2
II	2次関数における関数概念の形成および理解を深める指導	
1	研究のねらい	3
2	関数についての意識調査結果	3
3	指導方法・教材の工夫	5
4	評価方法の工夫	6
5	学習指導計画	6
6	検証授業について	9
7	まとめ	10
III	数え上げる作業を通して、順列・組合せの区別が明確にできる力を培う指導	
1	研究のねらい	11
2	研究の方法	11
3	指導計画	11
4	アンケート調査の結果と分析	15
5	まとめと今後の課題	18
IV	表計算ソフトを用いて、「定積分と面積の関係」の理解を深める指導	
1	研究のねらい	19
2	教材の工夫	19
3	学習指導計画	20
4	アンケート調査の結果と分析	23
5	まとめと今後の課題	24

## I 主題設定の理由

現在、都立高等学校では、各学校の個性化・特色化を推進している。学習指導要領の趣旨を踏まえ、生徒一人一人の個性を生かし、「生きる力」の育成に取り組んでいるところであり、基礎・基本を確実に定着させ、興味・関心・意欲を高め、学ぶことの楽しさや充実感を感得できる充実した教育活動を展開することが求められている。

平成11年3月告示の高等学校学習指導要領では、数学の目標として、「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して、創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。」ということが示された。

数学教育が直面している課題として、算数・数学に対する知識はあるが関心・意欲が低い、いわゆる「数学嫌い」や学力低下問題などがあげられる。これらの課題を解決するためには、今までの知識伝達型中心の授業方法を改善し、数学を学ぶ楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを感じさせ、興味・関心・意欲をより一層高めることが大切である。さらに、その興味・関心・意欲を基に、具体的な事象を題材とすることにより、生徒にとって数学を身近なものに感じさせ、自ら課題を設定しそれを解明していこうとする態度を育てる工夫が必要である。このような指導を通じて、単に数学を知識として覚えるのではなく、数学の文化や社会生活に果たしている役割を認識し、客観的・論理的に考える力や創造性の基礎を培うことができる。

すなわち、生徒が自ら目標をもって考え、「ゆとり」ある「数学的活動」を通して、「学ぶことの楽しさや充実感」を味わい、数学の学習の意義が理解できる授業を展開し、数学科の目標を達成することが重要となる。

このような状況を踏まえ、平成14年度の教育研究員数学部会では、研究主題を「基礎・基本の確実な定着を図り、自ら学ぶ意欲を育てる教材・指導方法及び評価の工夫」とした。

また、研究を進めるにあたり以下の点について配慮した。

- (1) 基礎・基本の徹底を図り、生徒が意欲をもてる分かりやすい授業を実施する。
- (2) 身近な事象を題材とすることにより、関心・意欲を喚起し、数学の有用性を感得する。
- (3) 体験的活動を取り入れ、自ら学ぶ意欲を高める。
- (4) コンピュータを道具として使用し、その有用性を認識させ情報活用能力を高める。

### ○各分科会研究テーマ

#### 第Ⅰ分科会

2次関数における関数概念の形成および理解を深める指導

#### 第Ⅱ分科会

数え上げる作業を通して、順列・組合せの区別が明確にできる力を培う指導

#### 第Ⅲ分科会

表計算ソフトを用いて、「定積分と面積の関係」の理解を深める指導

## Ⅱ 2次関数における関数概念の形成および理解を深める指導

### 1 研究のねらい

現行の高等学校学習指導要領の数学Ⅰの2次関数では、中学校で学んできた関数を基礎とし、関数の定義、1次関数の復習、用語の確認などを行い、2次関数  $y=ax^2$  のグラフから一般の2次関数のグラフへと進んでいく。この2次関数の学習の中で、関数を身近な事例と結び付けて考えようとする関心・意欲や、変化する事象の規則をとらえて数理的に考察しようとする態度が足りないと、グラフ（座標上の図形）をかくことに終始してしまい、関数とは何かを十分に理解できないことが考えられる。関数概念を十分に定着させるためには、集合、変数、対応、変化の割合、座標などを統合的に理解する必要がある、この統合的な理解の難しさが、多くの関数を苦手とする生徒を生み出す要因となる。

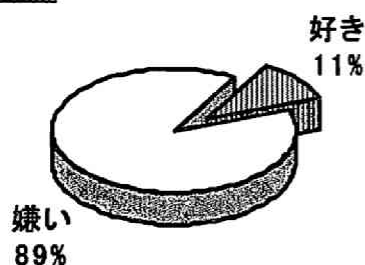
現行の小学校・中学校学習指導要領では、小学校高学年から関数関係を表、グラフ、式に表して考えることを指導し、中学1年で比例・反比例と座標、中学2年で1次関数と変化の割合、中学校3年で2次関数  $y=ax^2$  を指導するよう示されている。また、変数や変域は、中学1年で指導され、中学2、3年でも適宜指導することになっている。そして、具体的な事象を通して1次関数や2次関数  $y=ax^2$  を理解すると示されているが、この研究のために実施した関数についてのアンケート調査では、身近な事象から関数をとらえることができる生徒は少ないことがわかった。この様な状況から、高校入学までに学ぶべき関数概念の定着は十分とはいえない。

2次関数の増加・減少をもとに、最大値・最小値を求めたり、2次関数のグラフとx軸との共有点から2次方程式の解を調べるなど、関数を活用する学習においては、基本となる関数概念の定着は重要である。しかし、関数の用語を正しく理解していない生徒にとっては、関数概念を形成することが困難である。よって、高校では、中学校までの関数概念と用語をきちんとまとめて、関数の指導に取り組みたい。その上で、適宜、具体的な事象を体験させ、関数関係を考察することにより理解を深めることも大切である。そのためには、生徒が自ら学び意欲的に取り組める学習活動を通して関数概念を身に付けさせる必要があると考え、教材の開発を中心に本研究を行った。

### 2 関数についての意識調査結果

生徒の関数についての実態を把握するため、都立高校全日制普通科3校・全日制工業科3校の第1学年で、アンケート調査を実施し、有効回答数は426名であった。

#### Q1 中学校で学んだ数学の単元の中で、『関数』は好きですか？また、どんなところからそう感じますか？



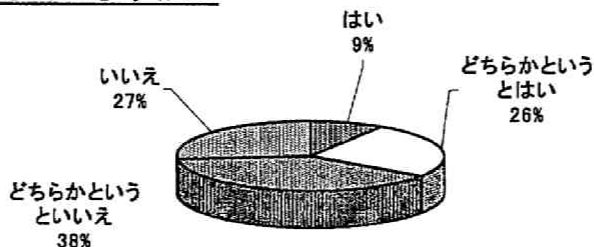
好きな理由…

- ・解けると楽しい
- ・達成感がある
- ・計算が面白い
- ・グラフをかくのが好き
- ・様々な応用ができる
- ・図形に比べて簡単
- ・他の単元よりも分かりやすい など

嫌いな理由…

- |           |            |                |         |
|-----------|------------|----------------|---------|
| • 難しい     | • 数学が苦手    | • 計算が難しい       | • 計算が面倒 |
| • グラフが難しい | • グラフがかけない | • 応用が難しい       | • 複雑    |
| • 分からない   | • 覚えるのが大変  | • 生活する上で役にたたない | など      |

**Q2 関数の意味を理解していますか？**



**Q3 身近な場面で感じられる関数関係の具体例を挙げてください。**

回答率は 41% (特になしを除いた回答率 37%) であり、関数の意味を理解できていると思う割合とほぼ一致する。具体例は、時間と水の変化量、時間と距離、距離と料金、物体の落ちる速度と時間をあげる生徒が大半を占めた。

- |                      |                |                |
|----------------------|----------------|----------------|
| • 時間と水の変化量 (風呂・水槽など) | • 電車の運賃と距離     | • 時間と走行距離      |
| • 携帯電話の通話時間と料金       | • 距離と料金        | • 消費税の計算       |
| • 温度の変化              | • 物体の落ちる時間と速度  | • 走行距離とガソリンの減る |
| • 物の数と値段             | • 季節と気温        | • 物を投げるとき      |
| • 株の上がり下がり           | • 荷物を運ぶ時の重さと値段 | • 電車のダイヤ など    |

**Q4 『関数』について説明して下さい。**

回答率は約 67% であり、関数を式やグラフでとらえる生徒が多い。

- |                                     |                    |               |
|-------------------------------------|--------------------|---------------|
| • $y=ax$ , $y=ax+b$ , $y=ax^2$ などの式 | • $y$ が $x$ で表される式 | • 直線または曲線のグラフ |
| • $x$ が増加するにともない $y$ も変化する          | • 放物線              | • 比例          |
| • 直線                                | • $x$ と $y$ が入っている | • 式や割合の関係 など  |

**Q5 1次関数  $y=ax+b$  の特徴を2つ以上挙げてください。**

回答率は約 57% であり、グラフの特徴を書いた生徒がほとんどである。

- |  |              |                        |
|--|--------------|------------------------|
| • グラフが直線                               | • 変化の割合は常に一定 | • $a$ -傾き $b$ - $y$ 切片 |
| • 値がひとつ                                | • 原点を通る      | • 原点を通らない              |
| • $a>0$ のときグラフは右上がり、 $a<0$ のときグラフは右下がり |              | など                     |

**Q6 2次関数  $y=ax^2$  の特徴を2つ以上挙げてください。**

回答率は約 63% であり、グラフの特徴を書いた生徒がほとんどである。

- |               |  |          |
|---------------|--|----------|
| • グラフが放物線     | • $y$ は $x$ の 2 乗に比例する                   | • 左右対称   |
| • 変化の割合は一定でない | • $y$ 軸について対称                            | • 2 乗である |
| • 原点を通る       | • $a$ が変わると式も変わる                         | • 値が 2 つ |
| • 計算が多い<br>など | • $a > 0$ のときグラフは下に凸、 $a < 0$ のときグラフは上に凸 |          |

今回のアンケート調査から、関数は生徒が苦手とする単元であることがわかった。数学自体が嫌いという理由もあるが、計算やグラフが難しいことや応用が難しいことを理由としている。2次関数を式の計算やグラフとしてとらえることは、ある程度できているが、具体的な事象と結びつきや用語の定着については十分でないことがわかった。

### 3 指導方法・教材の工夫

数学 I 「2次関数」の導入部分に焦点をあて、生徒が意欲的に学習に取り組み、関数概念を身に付ける教材として、物体の運動を題材とした実験を授業に取り入れた。

具体的には、距離センサーからグラフ電卓にデータを転送し、グラフ化する実験と、ビデオカメラで撮影した画像からデータを読み取り、パソコンに入力し、表計算ソフトを用いてグラフ化するという2通りの実験を行った。これらの実験を行うにあたり、次の指導を重視した。

- ①…「変化する2つの量（時間と距離）をみつけ、それらを  $x$ ,  $y$  の文字におくことにより、 $x$  が決まると  $y$  が一意的に決まるという対応が関数である」ことを実感する。
- ②…同じ物体でも重力に対する運動の方向などにより、変化の割合が一定でないことに気づき、そのグラフから1次関数と2次関数について学習する。
- ③…1次関数については、その式について調べる。
- ④…2次関数については、関数グラフィックソフトや表計算ソフトなどを利用して、そのグラフの表す式が2次式になっていることを理解する。

指導方法・教材の工夫として、次の点に留意した。

- ①…生徒が意欲的に取り組めるように、ワークシートに工夫を図る。
- ②…実験の考察の際に、少人数の班に分かれて話し合う。
- ③…まとめでは、工夫した方法で班ごとに発表する。
- ④…パソコンの利用法については、授業時間のほとんどがパソコンを操作する実習にならないように配慮し、必要なときに活用できるように次の3つの方法で工夫する。
  - プレゼンテーションソフトの活用など導入部分で利用する方法
  - 実験データの読み取り（FLASH MX を利用）や、表からのグラフ表示（EXCEL を利用）などの使用目的を明確にして、道具として利用する方法
  - 関数グラフィックソフトを用いたシミュレーションなど、教材の提示に利用する方法
- ⑤…④で述べた3つのパソコンの使用法が生かされるように、パソコンを活用する教材作成に工夫をする。

このような指導方法と教材の工夫が、一層関数概念への理解と定着に結びつくものと考えた。

#### 4 評価方法の工夫

評価方法については、評価の4観点（①数学への関心・意欲・態度、②数学的な見方や考え方、③数学的な表現・処理、④数量、図形などについての知識・理解）を踏まえて、関数の意味（4時間）という学習のまとまりで評価規準を作成した。本単元での内容及び生徒の実態を踏まえ、関心・意欲を高め、数学的な見方や考え方を引き出せることを中心に、評価の工夫を行ってみた。その際、観点間のバランスに配慮し、授業時間ごとの具体的な評価規準に細分化した。実際の授業では、1時間の中で4観点すべてを見ることは難しく、評価のポイントを1時間ごとに2～3観点到しぼった。また、指導案に示した評価規準は、授業中の場面を想定して、生徒の実際の行動をイメージしながら作成した。

#### 5 学習指導計画

関数の意味	関数の定義、1次関数の具体例 2次関数の定義、実験・シミュレーション	4時間
$y = ax^2$ のグラフ	$y = x^2$ のグラフ、 $y = ax^2$ のグラフの特徴	1時間
$y = ax^2$ のグラフの平行移動	$y = ax^2 + q$ のグラフ、 $y = a(x-p)^2$ のグラフ $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ	3時間
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ	平方完成の計算、 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ	3時間
2次関数の最大・最小	2次関数の増加・減少、最大値・最小値 限られた変域での最大値・最小値 シミュレーション	4時間
2次関数のグラフと2次方程式	2次関数のグラフとx軸との共有点 2次方程式の解の個数	2時間

##### (1) 学習指導案【学習指導計画「関数の意味」の目標】

- ① 具体的な事象のなかで、変化する2つの量を見つけ、これらの関係を調べることにより、関数が「変化する現象の規則をつかむこと」に気付く。
- ② 中学校で学習した関数の用語や、1次関数の復習を行う。
- ③ 関数をグラフ・式・表を用いて表現できる。
- ④ 2次関数を定義する。

##### (2) 評価規準【学習指導計画「関数の意味」の評価規準】

数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量、図形などについての知識・理解
① 実験・観測を行う場面や、生活における事象に対して、伴って変わる2つの数量関係に興味・関心をもつ。 ② 1次関数と比べることにより2次関数の特徴や性質を調べようとする。	① 時間と距離の2つの変量の間で、数量関係を見いだせる。 ② 具体的な事象の中から変化や対応の様子に着目して、関数関係を見いだすことができる。	① 1次関数を表す身近な事象をグラフ、式を用いて表現できる。 ② 1次関数のグラフから式を求めることができる。 ③ 関数の特徴や性質に従って、具体的な事象にある問題に対して処理することができる。	① 関数における用語などの基本事項を理解する。 ② 関数の意味を理解する。 ③ 式やグラフから1次関数と2次関数の違いを理解する。



1 時限目指導案

	指導内容	学習活動	指導上の留意点(・)、評価の観点(○)
導入 (10分)	<ul style="list-style-type: none"> <li>日常生活で使われている関数の例として、例1をパワーポイントで例示する。</li> </ul>	<p>【教科書の例題】 日常使っている関数の例として、例1を考える。</p> <p>例1) 12kmの道のりを、時速4kmで歩くことにする。歩きはじめてからx時間後の残りの道のりをykmとすると、xとyの間にどんな関係が成り立つか。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>xの変化とそのときのyの対応が密接な関係にあることを強調する。</li> <li>「yがxの関数である」とは、xの1つ1つの値に対して、yの値が1つずつ決まることを理解させる。</li> <li>関数の用語として、変数や変域について確認する。</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>1次関数を復習する。</li> <li>関数の定義の説明。</li> <li>本時の実験の説明。</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>xとyの関係を式で表す。</li> <li>xとyの関係を対応表にまとめる。</li> <li>xとyの関係をグラフで表す。</li> </ol> <p>(GRAPES利用)</p>	
展開 (20分)	<ul style="list-style-type: none"> <li>グラフ電卓と距離センサーを用いて、歩いて近づいてくる(遠ざかる)人や、斜面上を下る台車について、時間と距離の関係を調べる実験を行う。</li> <li>実験結果をもとに、時間xと距離yの関係を探る。</li> </ul>	<p>【実験】</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>距離センサーの前から歩いて遠ざかる。(生徒が歩く)</li> <li>距離センサーへ歩いて近づく。(生徒が歩く)</li> <li>距離センサーをスロープの上端に設置し、台車を斜面上から滑らせる。</li> </ol> <p>(補足) グラフ電卓の表示画面をスクリーンビューに転送しOHPでスクリーンに投影する。</p> <p>※ 距離センサーとは別に、メジャーとストップウォッチで、時間と距離を計測する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>距離センサーの測定方法の説明をする。</li> <li>一定の速度で歩くように指示する。</li> <li>○OHPに投影されたグラフを見て、時間と距離の2つの変量に関心をもつか。(数学への関心・意欲・態度)</li> <li>①と②の関係が1次関数であることに気付かせる。</li> <li>①と②のグラフの傾きの違いに着目させる。</li> <li>③のグラフが曲線であることに気付かせ、グラフの違いから、③の関係が1次関数でないことを強調する。</li> </ul>
考察 (15分)	<ul style="list-style-type: none"> <li>①～③の実験について、距離センサー・グラフ電卓なしでグラフ化できないか考える。グラフ化できたものについては式を求める。</li> </ul>	<p>【4班に分かれて、班ごとに考察する】</p> <p>★1人1人がワークシートに記入しながら話し合う。</p> <p>[ワークシートに記入する内容]</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>それぞれの実験ごとに、距離センサーとは別に計測したデータを表に記入。</li> <li>①、②で、距離センサーとは別に計測したデータをもとに、グラフをかく。</li> <li>(2)と同じ方法で、③のグラフがかけるか考える。</li> <li>①、②のグラフから式を求める。</li> <li>①～③における変化の割合・変域等。</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1次関数では、変化の割合が一定なことを確認する。</li> <li>○変化の割合が一定の場合、距離センサーとは別に計測したデータから、グラフがかけられるか。また、グラフから式が求まるか。(数学的な表現・処理)</li> <li>グラフをかく際に、変域を考えてかいているかを確認する。</li> </ul>
まとめ (5分)	<ul style="list-style-type: none"> <li>実験結果のまとめをする。</li> <li>次回までの課題を提示する。</li> </ul>	<p>【班ごとに発表する】 ワークシートの内容にそって、各班で話し合ったことや、今回の実験について感じたことなどを発表する。</p> <p>【次回の授業にむけての発問】 次回までの課題として、次の発問について考える。</p> <p>距離センサーを使わずに、実験③のグラフをかくためには、時間と距離の計測にどのような工夫が必要か。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○時間と距離の2つの変量の間で、数量関係を見いだせるか。(数学的な見方や考え方)</li> <li>変化の割合が一定でない場合、計測したデータが少ないと、うまくグラフがかけないことに気付かせる。</li> </ul>

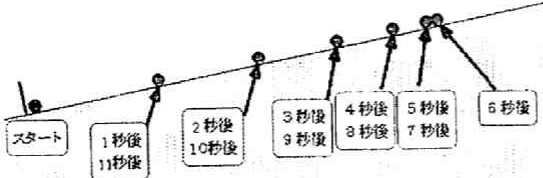
2, 3 時限目指導案

	指導内容	学習活動	指導上の留意点(・)、評価の観点(○)
導入 (25分)	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 前回の課題に対する生徒の考えを聞く。</li> <li>・ EXCEL でのグラフの表示方法の説明。</li> <li>・ 2次関数 <math>y=x^2</math> の復習。</li> <li>・ 実験の目的の説明。</li> <li>・ 本時の実験の説明。</li> </ul>	<p>【班ごとに発表する】(前回の班) 前回の課題について考えたことを発表する。</p> <p>距離センサーを使わずに、実験③のグラフをかくためには、時間と距離の計測にどのような工夫が必要か。</p> <p>【EXCELでのグラフ表示方法を学習する】 ワークシート A (EXCEL ファイル) で、<math>y=x^2</math> についてグラフ表示の練習をする。</p> <p>【実験の目的確認・準備】 説明を聞き、実験の目的について考える。 2班に分かれて、実験器材を準備する。 実験の役割分担を決める。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 実験③のグラフをかくためには、計測データを多くとる必要があることに気付かせる。</li> <li>・ EXCEL には、表からグラフを表示する機能があること知らせる。(グラフをかく具としてのパソコンの利用)</li> <li>・ 2つの変量(時間と距離)を見つけ、これらの関係を調ることが実験のねらいであることを強調する。</li> </ul>
展開 (40分)	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ レール上をころがる球を用いて、水平方向の運動と、斜め方向の運動について、時間と距離の関係を調べる実験を行う。</li> <li>・ 実験結果をもとに、時間 <math>x</math> と距離 <math>y</math> の関係を探る。</li> </ul>	<p>【実験 1】 レールを水平に設置し、球を発射する。</p> <p>【実験 2】 レールを斜めに設置し、球を発射する。</p>  <p>※ 2班に分かれて実験を行う。 ※ 実験の手順</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>① 計測 (球の動きをデジタルビデオで撮影する。)</li> <li>② データ処理 (メディアに記録されたデータをパソコン: FLASH MX に取り込む。1コマが 0.1 秒になるようにタイムラインを設定し、ディスプレイ上で、時間と距離を読みとる。)</li> </ol>  <ol style="list-style-type: none"> <li>③ 時間 <math>x</math>、距離 <math>y</math> の対応表作成 (ワークシート B (EXCEL ファイル) に、②で読みとったデータを入力する。)</li> <li>④ グラフの表示 (入力したデータをもとに、EXCEL でグラフ表示)</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 撮影がうまくいかなかった場合は、もう一度撮りなおす</li> <li>・ 0.5 秒ごとに、レールに貼付けたスケールの目盛りから、球の位置を読みとる。</li> <li>・ 画像データを FLASH MX 取り込んだときに多少誤差が生じることを知らせる。</li> <li>・ ワークシート B (EXCEL ファイル) に距離を入力すると時間 <math>x</math> と距離 <math>y</math> の対応表をくっていることに気付かせる</li> <li>○ 表やグラフで表された数量係に関心をもち、1次関数でない関数についても意欲的調べようとしているか。(姿への関心・意欲・態度)</li> </ul>
考察 (20分)	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 実験 1 や実験 2 と似たような運動を身近な事例で考える。</li> <li>・ 実験 1 と実験 2 のグラフの違いを考察する。</li> </ul>	<p>【4班に分かれて、班ごとに考察する】 ★ 1人1人がワークシート C に記入しながら話し合う。</p> <p>[ワークシート C に記入する内容]</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 実験 1 と実験 2 の運動をそれぞれ記述してみる。(自然現象や、日常生活で体験していることなどを参考にする。)</li> <li>(2) 実験 1 と実験 2 のグラフの形状を述べる。 実験 1 のグラフ …… 直線 実験 2 のグラフ …… 放物線</li> <li>(3) 実験 1 と実験 2 のグラフから、EXCEL の機能を利用して式を求める。</li> <li>(4) 実験 1 と実験 2 における変化の割合・変域等を調べる。</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 時間と距離の変化の割合に目し、「実験 1 は一定だが、実験 2 は一定でない。」と気付かせる。</li> <li>○ 実験結果から、変化や対応様子に着目して、関数関係見いだせるか。(数学的な方や考え方)</li> <li>○ 実験 1 が 1 次関数になることを理解し、グラフの傾きや変を求められるか。(数量、図形についての表現・処理)</li> <li>・ 実験 2 のグラフが、中学校習った <math>y=ax^2</math> のグラフと同形であることに気付かせる</li> </ul>

まとめ (15分)

- 実験結果のまとめをする。
- 実験1と実験2のグラフを表す式を提示する。(GRAPES利用)
- 2次関数となる身近な事例を提示する。(噴水・球の放物運動)
- 2次関数の定義の説明。

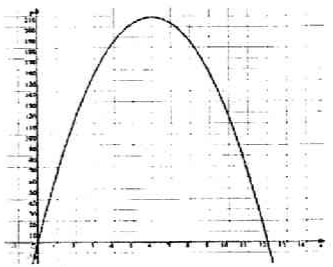
【班ごとに発表する】  
ワークシートの内容にそって、各班で話し合ったことや、今回の実験について感じたことなどを発表する。  
【シミュレーション】  
GRAPESで提示された式およびグラフと、実験結果から得られたグラフとを比べる。(式からグラフを描くひとつの方法として、関数グラフィックソフトの利用が有効であることを実感する。)



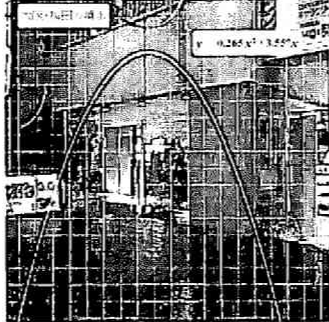
スタート  
1秒後 11秒後  
2秒後 10秒後  
3秒後 9秒後  
4秒後 8秒後  
5秒後 7秒後  
6秒後

○ 2次関数の特徴を1次関数と比べて調べようとしているか。(数学への関心・意欲・態度)

- 関数グラフィックソフトを利用すると式からグラフが簡単にかけられることを実感させる。



【2次関数の定義】  
身近な2次関数の例として、噴水と、球の放物運動を考える。



実験2の関数のようにyがxの2次式で表されるものが、2次関数であることを考える。

- 噴水の画像と2次関数のグラフが重なることに気付かせる。
- 一般に、2次関数は、 $y=ax^2+bx+c$ の形で表される。

<実験機材>

- ・ グラフ電卓、CBL (データ収集機)、距離センサー、ビュースクリーン、OHP、巻尺(10 m)、ストップウォッチ
- ・ レール、アクリル球 (直径 5 cm)、バネ式発射装置、デジタルビデオカメラ、三脚
- ・ パソコン2台 (パソコンLAN装置利用)、メモリーカードリーダー

## 6 検証授業について

検証授業は、都立高等学校工業科全日制課程1年生の1クラスで、1月中旬に実施する。検証授業で本研究の効果を調べるため、授業に対するアンケートと自己評価を行う。分析する観点としては、①距離センサーや、レールを使った実験などの授業による関数に対する関心・意欲の変化、②パソコンの活用による関数学習への取組み態度の変化、③関数概念の定着および理解度の変化を中心とする。また、自己評価は、指導案に示した評価の観点をもとに行う。

これらのデータをもとに本研究の成果と課題を分析し、より効果的な指導について探求していく。なお、アンケートや自己評価の分析結果は、発表のときの補助資料に載せる。アンケート及び自己評価の具体的な内容は以下の通りである。

### (1) アンケート例

アンケート項目	回答欄	感想欄
①距離センサーや、レールを使った実験を取り入れたことで、関数の授業へ意欲的に取り組むことができましたか。	アイウエ	
②今回の3時間の授業を通して、関数に興味をもつことができましたか。	アイウエ	

③今回の3時間の授業を通して、1次関数の復習や関数用語の確認が十分にできましたか。	ア イ ウ エ	
④時間と距離(伴ってかわる2つの変数)などの具体的な事から関数関係を見いだすことができましたか。	ア イ ウ エ	
⑤伴ってかわる2つの変数(時間と距離)の表からグラフをかくときにパソコンを利用することにより、関数をグラフで表すことに興味をもちましたか。	ア イ ウ エ	
⑥1時間目の授業の導入部分にパソコン(プレゼンテーションソフト)を活用することで、関数の授業へ意欲的に取り組みましたか。	ア イ ウ エ	
⑦物体の運動などをグラフィックソフトでシミュレーションすることで、関数に興味をもちましたか。	ア イ ウ エ	

## (2) 自己評価例

評価項目	観点	自己評価欄	感想欄
①物体の運動を関数の授業の題材とすることに興味・関心をもちましたか。	数学への関心・意欲・態度	ア イ ウ エ	
②物体の運動を通して1次関数の理解が深まりましたか。	数量、図形などについての知識・理解	ア イ ウ エ	
③物体の運動を通して2次関数の理解が深まりましたか。	数量、図形などについての知識・理解	ア イ ウ エ	
④1次関数のグラフを見て、その式を求めることができましたか。	数学的な表現・処理	ア イ ウ エ	
⑤式やグラフから1次関数と2次関数の違いが理解できましたか。	数量、図形などについての知識・理解	ア イ ウ エ	
⑥座標上に、点や1次関数のグラフをかくことができましたか。	数学的な表現・処理	ア イ ウ エ	
⑦1次関数の式やグラフを見て、y切片や傾きがわかりましたか。	数量、図形などについての知識・理解	ア イ ウ エ	
⑧変域を考えて、1次関数のグラフをかくことができましたか。	数学的な表現・処理	ア イ ウ エ	
⑨関数の意味が理解できましたか。	数量、図形などについての知識・理解	ア イ ウ エ	
⑩今回の実験のほかに、身近に感じられる関数の具体例をあげることができますか。	数学的な見方や考え方	ア イ ウ エ	
⑪いろいろな数量関係を文字式で表すことができましたか。	数学的な見方や考え方	ア イ ウ エ	

### 備考

上記のアンケート及び自己評価の各項目について、ア「そう思う」・イ「ややそう思う」・ウ「ややそうは思わない」・エ「そうは思わない」の4枝択一で回答を求める。また、各項目ごとに感想を書く欄を設ける。

## 7 まとめ

関数を苦手とする生徒が多い状況の中で関数概念の定着を図り、2次関数の基礎・基本を身につけるために、今回の研究では、関数の具体的な事象を実験により生徒に体験させることにした。最初は、ボールの投げ上げ実験等も考えたが、生徒が真上に投げ上げたり、距離を正確に読みとる難しさから、より扱いやすく読みとりやすい距離センサーやレールを使ったものに切り替えた。実験のデータ処理に、道具としてパソコンを利用することにより、生徒は短い時間で「時間と距離」の数量関係に関心を持ち、次の段階である考察につながると考えた。実験装置ではレールとの抵抗をなるべく小さくするためにアクリル球を利用したが、より正確な2次関数のグラフをかき、美しさを実感できる教材開発は今後の課題である。

また、実験やコンピュータの操作に気を取られ、数学的な考察が十分に出来ない生徒がいることが予想される。このような生徒への対応として、ティームティーチングなど、教授法の工夫の必要性を探っていきたい。

### <参考文献>

- ・北尾倫彦・鈴木彬編集 観点別学習状況の新評価基準表(中学校数学) 図書文化
- ・大阪府教育センター 高等学校数学「新学習指導要領の要点」
- ・愛知県総合教育センター コンピュータを活用する高校数学
- ・友田勝久著 関数ソフト GRAPES の Web ページ <http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/index.html>

### Ⅲ 数え上げる作業を通して、順列・組合せの区別が明確にできる力を培う指導

#### 1 研究のねらい

「個数の処理」では、問題から順列と組合せの見分けができていない生徒が意外と多い。順番を考慮しなければならぬ問題に組合せCの記号を使っていたり、逆に順番のない問題に順列Pの記号を使っていたりする。また、机間指導をしたり答案等を見ると、問題そのものには正解していても、問題文の中からキーワードを見つけ、並べる→順列(P)、選ぶ→組合せ(C)のように、特定の語句だけで判断し、機械的に ${}_n P_r$ や ${}_n C_r$ の公式を使って答えを求めている場合も多く、順列と組合せの使い分けが十分に理解できているとは言い難い。その原因として、第一に「並べる」と「選ぶ」の言葉の意味が理解できていないこと、第二に実体験の不足、つまり、問題から得られるイメージと計算の結果にギャップを感じてしまうことにあるのではないかと考えた。

この内容は、中学校で扱っている(中学校学習指導要領 平成10年12月)こともあって、高校では「数え上げる作業」に十分な時間が割かれていない。しかし、樹形図等を用いて場合の数をもれもなく、重複もなく、順序よく数え上げる作業は、その後の積の法則等につながっていくものであり、具体的な考察に当たっての基本となるものである。

そこで、「数え上げる作業」を積み重ねる過程から、生徒自らが「選ぶ」・「並べる」の意味を考え、規則性を見つけて、「組合せ」と「順列」の違いを理解し、実感することをねらいとして標記の研究主題を設定した。

なお、この研究の内容は、新学習指導要領では、数学Aにおいて「場合の数と確率」の項目で「順列・組合せ」として学習することになっており、そこでの目標(「基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し処理する能力を育てるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識できるようにする。」)にも十分かなうものである。

#### 2 研究の方法

前項のねらいに基づく研究を、以下のような手順で進める。

(1) ワークシートを作成する。

ワークシートの作成に当たっては、生徒の実態を踏まえ、より身近な題材を扱うことにより活動が効率よく行え、興味・関心をもって取り組めるようにする。

(2) ワークシートを活用した検証授業を行う。

(3) 演習、確認テストを実施して学習内容の理解度を調べる。

(4) 研究の成果を確かめるため、検証授業を行ったクラスとそうでないクラスとの結果を比較する。

#### 3 指導計画

図1のように、これまでの授業の展開は、順列 ${}_n P_r$ の後に階乗!や重複順列、円順列、組合せ ${}_n C_r$ を学習する形となっている。しかし、生徒にとっては順列Pから組合せCを学



習する間に、円順列など、順列に関して学ばなければならない事柄が多く現れ、順列と組合せの違いを理解する際の妨げになっているように思われる。また、私たちの生活の中では、「選んでから並べる」というのが自然な思考である。そこで、指導方法として、組合せから順列を扱い、さらに、組合せと順列の間に特別な順列を入れることなくつなげ、比較することにより、生徒の理解が深まり、定着すると考え、図2の方法を考えた。

(1) 1時間目

「樹形図等による数え上げ」

樹形図等を用い、場合の数をすべて書き並べる作業を通して、もれや重複がなく、順序よく数え上げる力を定着し、その有用性を認識する。

(2) 2時間目

「積の法則」

樹形図から積の法則を導き、それを活用する態度を育む。

(3) 3時間目

「組合せと順列」

組合せ・順列の総数を樹形図等を使って求め、それらを並列することで、「選ぶ」と「並べる」の違いを視覚的に捉え、理解し、組合せと順列の関係についても把握する。また、 $nC_r$ 、 $nP_r$ の定義を与え、組合せ・順列の総数を $nC_r$ 、 $nP_r$ の記号を用いて正確に表すことができるようにする。

(4) 4時間目

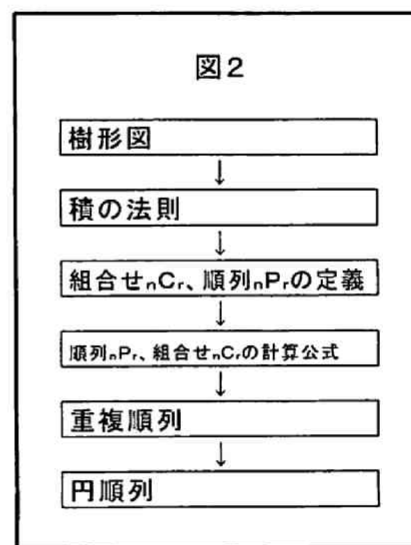
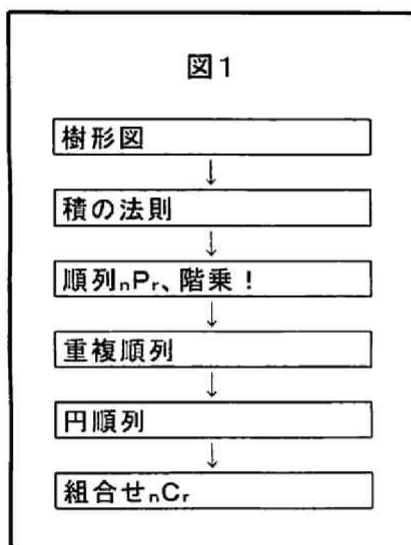
「演習及び確認テスト」

演習を通して、これまで学んできた事柄の定着を図る。

(5) 5時間目

「順列、組合せの計算公式の導入」

積の法則の発展として、 $nP_r$ の計算式を導き、さらに組合せと順列の関係から $nC_r$ の式を導いて、これらを活用する。



○学習指導案（1）

指導単元 積の法則（指導計画の2時間目）

指導目標 場合の数が多く、書き並べて数え上げることが大変な場合、樹形図のイメージから積の法則を発見・理解し、その活用を図る。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点(・)及び評価の観点(○)				
導入	樹形図による数え上げの復習として、【復習1】を与える。	<p>【復習1】</p> <p>あるレストランのランチは、次のA、B、Cの3つのグループから1品ずつ選べる。このとき、ランチの組合せは全部で何通りあるか。</p> <p>A [パン、ライス] B [ステーキ、和風ハンバーグ、魚のグリル、シチュー] C [コーヒー、紅茶]</p> <p>ランチの選び方の総数を樹形図を使って数え上げる。</p>	・樹形図の考え方がつかめているかを確認する				
展開	積の法則の導入として【問題1】を提示する。	<p>【問題1】</p> <p>あるハンバーガー屋で次のようなセットメニューがあった。このとき、メニューは全部で何通りあるか。</p> <p>単品価格+300円（サイドメニュー1品とドリンク1品）</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                 ナン ハンバーガー ホットドッグ ライスバーガー             </td> <td style="padding: 0 10px;">+</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                 野菜サラダ フライドポテト オニオンリング             </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">                 コーラ メロンソーダ ジンジャエール オレンジジュース ウーロン茶 アイスコーヒー ホットコーヒー ミルクティー レモンティー コーンスープ             </td> </tr> </table>	ナン ハンバーガー ホットドッグ ライスバーガー	+	野菜サラダ フライドポテト オニオンリング	コーラ メロンソーダ ジンジャエール オレンジジュース ウーロン茶 アイスコーヒー ホットコーヒー ミルクティー レモンティー コーンスープ	・樹形図を用いて数え上げるよう指示する。
ナン ハンバーガー ホットドッグ ライスバーガー	+	野菜サラダ フライドポテト オニオンリング	コーラ メロンソーダ ジンジャエール オレンジジュース ウーロン茶 アイスコーヒー ホットコーヒー ミルクティー レモンティー コーンスープ				
	樹形図を考察することで、積の法則を導く。	<p>場合の数が多く、樹形図を利用して数え上げることが大変なことに気づく。</p> <p>これまでに取り組んだ問題や【復習1】の樹形図を考察し、その規則性から掛け算をすることで場合の数が求まることを知る。樹形図で数え上げたものと積の法則から得られた結果が一致することを確認する。</p>	<p>・場合の数をすべて書き並べるのは大変なので他の方法を考えるよう指示する。</p> <p>○積の法則を理解する。（見方や考え方）</p>				

展 開	積の法則を活用して【問題2】、【問題3】を解く。	<p>【問題2】</p> <p>男子20人、女子20人の中から男女1人ずつの代表者を選ぶとき、その選び方は何通りあるか。</p> <p>【問題3】</p> <p>0から9までの数字を3つ合わせて開けるダイヤル錠の数字の合わせ方は、全部で何通りあるか。積の法則を利用して場合の数を求める。</p>	<p>・解けない生徒には、個別に男女20人ずつの名簿やダイヤル錠を渡し、具体例を作りながら、一緒に考える。</p> <p>○積の法則を活用する。(知識・理解)</p>
	まとめ	【問題2】、【問題3】の答えを確認する。積の法則の理解を深める。	積の法則の有効性を実感する。

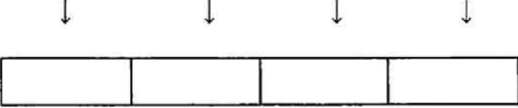
### ○学習指導案(2)

指導単元 組合せと順列(指導計画の3時間目)

指導目標 「選ぶ」作業と「並べる」作業を通して、組合せと順列の違いを理解させる。

	指導内容	学習活動	指導上の留意点(・)及び評価の観点(○)																																												
導 入	【例題1】を提示する。	<p>【例題1】</p> <p>次の曲の中から何曲かを選び、それをランダムに演奏するとき、曲の選び方と演奏の順番がそれぞれ何通りあるか調べなさい。</p> <p>A [ ] B [ ] C [ ] D [ ]</p> <p>単に「選ぶ」だけの場合の数と「選んだものを並べる」ときの場合の数の違いについて考える。</p>	<p>・生徒が興味・関心をもてるよう、好みの選曲をさせる。</p>																																												
展 開	【例題1】について「選び方」、「演奏の順番」をすべて書き上げる。	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="2">2曲を選ぶ場合</th> <th colspan="2">3曲を選ぶ場合</th> </tr> <tr> <th>選び方</th> <th>演奏の順番</th> <th>選び方</th> <th>演奏の順番</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>ABCD</td><td></td><td>ABCD</td><td></td></tr> <tr><td>ABCD</td><td></td><td>ABCD</td><td></td></tr> <tr><td>ABCD</td><td></td><td>ABCD</td><td></td></tr> <tr><td>ABCD</td><td></td><td>ABCD</td><td></td></tr> <tr><td>ABCD</td><td></td><td>ABCD</td><td></td></tr> <tr><td>ABCD</td><td></td><td>ABCD</td><td></td></tr> <tr><td>ABCD</td><td></td><td>ABCD</td><td></td></tr> <tr><td>ABCD</td><td></td><td>ABCD</td><td></td></tr> <tr> <td>通り</td> <td>通り</td> <td>通り</td> <td>通り</td> </tr> </tbody> </table> <p>記号で表すと</p>	2曲を選ぶ場合		3曲を選ぶ場合		選び方	演奏の順番	選び方	演奏の順番	ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		ABCD		通り	通り	通り	通り	<p>・選ぶときに、重複やもれがないように注意する。</p> <p>・選び方から並べ方を考える。</p> <p>○「選び方」、「演奏の順番」を重複もれもなく書き上げる。(関心・意欲・態度)</p>
2曲を選ぶ場合		3曲を選ぶ場合																																													
選び方	演奏の順番	選び方	演奏の順番																																												
ABCD		ABCD																																													
ABCD		ABCD																																													
ABCD		ABCD																																													
ABCD		ABCD																																													
ABCD		ABCD																																													
ABCD		ABCD																																													
ABCD		ABCD																																													
ABCD		ABCD																																													
通り	通り	通り	通り																																												

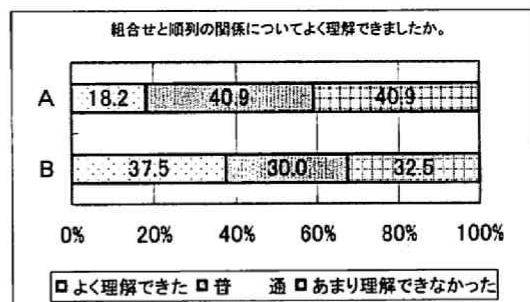
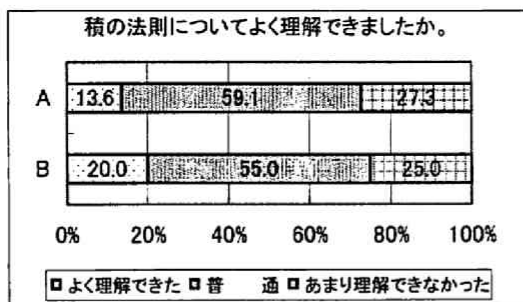
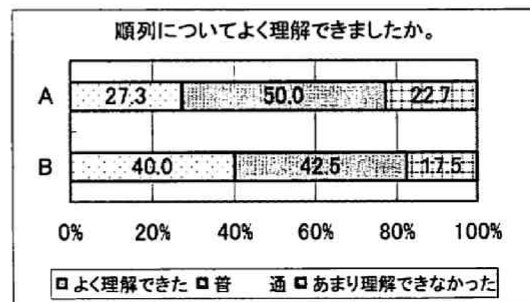
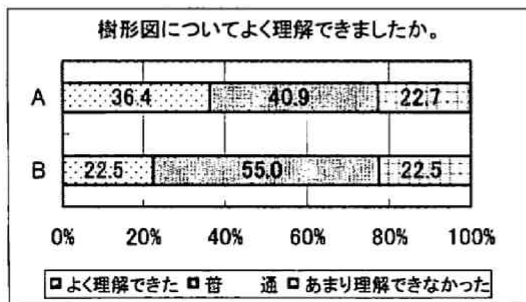
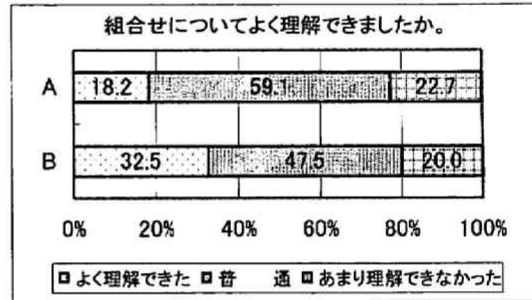
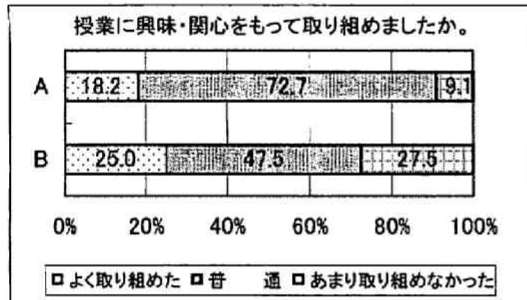


展 開	<p><math>nCr</math>、<math>nPr</math>の定義を与え、「選び方」、「並べ方」の総数と対応させる。</p> <p>組合せ(C)と順列(P)との関係を考える。</p> <p>【問題1】の「選び方」と「走る順番」の総数をすべて書き上げる。</p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p><math>nCr</math>と<math>nPr</math>の関係 → ( )</p> <p>「選び方」をワークシートに印を付けて調べる。</p> <p>次に一つ一つの選び方について、「演奏の順番」を考え、それらをすべて書き並べる。</p> <p><math>nCr</math>、<math>nPr</math>の意味を理解し、「選び方」、「演奏の順番」のそれぞれの総数を<math>nCr</math>、<math>nPr</math>の記号で表す。</p> <p>【例題1】の結果を観察し、<math>nCr</math>と<math>nPr</math>の関係を考え、式で表す。</p> <p>【問題1】</p> <p>5人の陸上部員A、B、C、D、Eの中から3人のリレー選手を選ぶとき、次の各問に答えなさい</p> <p>(1) リレーに出る3人の選び方は、全部で何通りあるか求めなさい。また、その選び方の総数を記号で表しなさい。</p> <p>(2) 選ばれたリレー選手の走る順番は、全部で何通りあるか求めなさい。また、その走る順番の総数を記号で表しなさい。</p> <p>(3) リレー選手の選び方の総数と走る順番の総数の関係を式で表しなさい。</p> <p>リレー選手の「選び方」とその選んだ選手の「走る順番」の総数をすべて書き上げて数える。それぞれの場合の数に<math>nCr</math>と<math>nPr</math>の記号を対応させ、<math>nCr</math>と<math>nPr</math>の関係を式で表す。</p>	<p>・<math>nCr</math>、<math>nPr</math>の計算の方法は教えない。</p> <p>・特に、「選び方」を書き上げるときは、重複やもれに注意する。</p> <p>・「選び方」から「走る順番」を作る。</p> <p>○組合せ、順列の総数を<math>nCr</math>、<math>nPr</math>を使って表す。(表現・処理)</p>
ま と め	<p>【問題1】の答えを確認する。</p> <p><math>nCr</math>と<math>nPr</math>の記号の意味、<math>nCr</math>と<math>nPr</math>の関係を理解する。</p>	<p>書き上げた「選び方」と「走る順番」の結果から、「選ぶこと」と「選んだものを並べること」の違いを実感する。</p>	

#### 4 アンケート調査の結果と分析

アンケート調査は、定時制職業科、全日制職業科の2校の第1学年で行った。このうち、検証授業を実施したのは、定時制、全日制各1クラスである。比較検討するため、検証授業を実施していないクラスにも同じアンケート調査を実施した。アンケート調査の項目及び回答結果については、以下のとおりである。

## アンケートの結果



注) A: 検証授業を実施したクラス  
B: 検証授業を実施していないクラス

### 検証授業を実施したクラスにおける生徒の感想

- ・ 数え上げの工夫が分かりづらかった
- ・ 要点だけを簡潔にまとめてほしい
- ・ 組合せと順列の練習問題をやってほしかった
- ・ 分かり易い例等があったとてもよかった
- ・ 解説が丁寧だったので分かり易かった
- ・ 文章問題のとき、CとPのどちらの式を使ったらいいか分からない
- ・ ときどき分かりにくくなる
- ・ 分かり易いと思う
- ・ 数学は難しい
- ・ 数学自体が難しい
- ・ 分かり易い所もあったけど分かりにくい所もあった

### P高等学校（全日制職業科）における問題の抜粋

- 問題1 男子22人と女子10人のクラスの中から旅行委員を男女各1人ずつ選ぶとき、選び方は全部で何通りあるか。  
 問題2 0, 1, 2, 3, 4の5つの数字から異なる3つの数字を用いて3桁の奇数を作るとき、全部で何通りできるかを樹形図を書いて求めよ。  
 問題3 11人の生徒がいるとき、次の各問に答えよ。  
 ① 議長、副議長、書記を各1人ずつ選ぶ方法は何通りあるか。  
 ② 3人の委員を選ぶ方法は何通りあるか。  
 問題4 A, B, C, D, E, Fの6人の中から走る順番を考えて3人の走者を選ぶ方法は何通りあるか。  
 問題5 12色のクレヨンから4色を選ぶ方法は何通りあるか。  
 問題6 両親と子供4人の6人家族が1列に並んで写真を撮るとき、家族6人の並び方は全部で何通りあるか。

### 正解者の割合

	問題1	問題2	問題3①	問題3②	問題4	問題5	問題6
A	78.9%	42.1%	63.2%	47.4%	73.7%	63.2%	52.6%
B	57.5%	30.0%	77.5%	45.0%	75.0%	57.5%	65.0%

ワイシャツとネクタイ等のコーディネートや旅行代金の場合の数、ランチの組合せ、曲の選び方など、全体を通して身近な題材を取り上げたため、生徒は、授業に興味・関心をもって取り組んだ。

最初から樹形図を利用して数え上げた生徒はわずかであったが、自分が数え上げたものと樹形図を見比べることによって、多くの生徒は樹形図のよさを認識し理解した。このことは、アンケートの結果と定期考査問題2の正解者の割合からも読み取れる。一方、授業についての感想に「数え上げの工夫が分かりづらかった」というものがあつたが、この単元の基本となる考え方であるので、個別の対応が必要であると考えられる。

樹形図と積の法則の結びつきを理解するのに時間がかかった生徒が多かったが、検証授業を行ったクラスの問題1の結果から、「積の法則」については、おおむね定着し、数学的な見方や考え方のよさを実感できたといえる。

本研究のねらいである「組合せと順列の違いを理解する」ことについては、例題のワークシートを工夫したため（曲を選ぶとき、予めA B C Dと印刷したところに○を付けていくようにした）、戸惑うことなく選ぶことができ、演奏の順番も、もれも重複もなく書き上げ、 $nC_r$ と $nP_r$ の記号、 $nC_r$ と $nP_r$ の関係もよく理解していたが、アンケートの結果では、組合せと順列の関係について「あまり理解できなかった」という回答が他の項目に比べて多くなっている。特に、問題3①、問題4、問題6の正解者の割合は、検証授業を行わなかったクラスの方が高く、順番を付けるべき問題に順番を付けられなかった生徒が多かったことが分かる。しかし、「選ぶ（組合せ）」ことについては、問題3②、問題5の正解者の割合から、研究の成果があつたことがみられる。

「復習・確認テスト」の復習問題では、「6色から4色選んで4つの形の異なる図を塗り分けるとき、4色の選び方は何通りあるか。」「8つのビデオから2つ選び、文化祭の1日目と2日目に違う作品を上映するとき、2つの作品の選び方は何通りあるか。」という組合

せの問題と、同じ設定で「4つの図の塗り方は何通りあるか。」「1日目に上映する作品と2日目に上映する作品の決め方は何通りあるか。」という順列の問題を、確認テストでは、「就職試験の問題を6題から3題選んで解答するとき、問題の選び方は何通りあるか。」という組合せの問題と、「1, 2, 3, 4, 5, 6, 7の中から2つの数字を選んで2桁の整数を作るとき、何通りの整数ができるか。」という順列の問題を行った。これまでより場合の数が多く複雑な問題であったが、もれも重複もなく数え上げていた。組合せの問題で、樹形図を利用して重複して数え上げていた生徒がいたが、ヒントにより、数がだんだん減っていくことが理解できたようであった。さらに、組合せの問題では数えもれがあったものの、順序が違ふものは含まれないという点に関しては理解できていた。順列の問題では、総数を求めるとき、書き上げでなく、積の法則を利用する生徒もいた。しかし、順列の2桁の整数を作る問題では、十の位と一の位の数字を入れ替えたものが含まれていない生徒が多かった。

## 5 まとめと今後の課題

順列と組合せの見分けができていない生徒が多い現状から、その原因のを考え、「選んでから並べる」のが自然な思考であるという前提で研究を行った。組合せから順列を扱う方法で、指導内容・教材の工夫を試みた。

「順列と組合せの区別ができる力を培う」というねらいに対して、十分な成果があったとはいえないが、選ぶ（組合せ）ことについて「順序が違ふものは含まない」ことを理解した生徒も多く、「樹形図等を利用してもれも重複もなく数え上げることができる」「数え上げる作業を通して規則を発見・理解し、活用できる」「選ぶ（組合せ）ことの意味が分かる」という点については確実に成果があった。また、生徒の実態を踏まえ、より身近な題材を扱い、数え上げる作業（実体験）を積み重ねることにより、生徒は興味・関心をもって取り組むことができた。

最後に、今回の研究を通じ、作業を通して規則を発見したり、誤りを修正する過程で言葉の定義や意味を実感しながら学習をすすめることは、生徒にとって順列・組合せの意味を理解する上で大切な指導方法であることを再確認した。今後も、体験することを大切にしながら、生徒が数学をより身近に感じられるような教材、指導の工夫を行っていきたいと考えている。

### <参考文献・資料>

- ・中学校学習指導要領 平成10年12月
- ・高等学校学習指導要領 平成11年3月
- ・平成3年度 教育研究員報告書 数学 (東京都教育委員会)
- ・日本数学教育学会誌 1999 第81巻 臨時増刊 (日本数学教育学会)
- ・数学教室 2001年 7月号～10月号 (国土社)
- ・数学のいずみ <http://www.nikonet.or.jp/spring/>

## IV 表計算ソフトを用いて、「定積分と面積の関係」の理解を深める指導

### 1 研究のねらい

「微分」とは、細かく分けることであり、「積分」とは、細かく分けたものを集めることである。このようなイメージは、その学習の初期段階から認識しておくべき、微積分の基礎・基本となるとらえ方であると考えられる。微積分を単なる計算技術としてとらえ、学習内容がその計算練習に偏れば、たとえ複雑な問題が解けるようになったとしても、微積分の本質を理解したとは言えない。特に積分は、図形的面積を考えると、微小な面積 $f(x)\Delta x$ （すなわち、高さが $f(x)$ 、底辺が $\Delta x$ である長方形の面積）の和の極限としてとらえられ、その和は初等教育において学習した計算により求めることができる。このように積分が簡単な計算の延長上にあると認識すれば、微分の逆演算であるという認識しかもたない場合よりも、積分に対してより親しみをもつことができると考えられる。

現行の学習指導要領解説では、数学Ⅱの定積分について、「具体的なイメージを与えるために、例えば、面積を求める例などに関連付けて導入することが考えられる。」としており、多くの教科書で、定積分で面積が求められることを示す種々な方法が工夫されている。しかし、それらは、曲線部分を含む図形的面積をどのようにして求めるかという問題意識が生徒に十分でないまま、積分が微分の逆演算であるという考えを定着させてしまう結果になるおそれがあり、それでは、積分そのものもつイメージを味わうことはできない。

本研究では、数学Ⅱの学習段階において、面積をより積極的に扱うことを考え、表計算ソフトを用いて実際に面積の近似値を計算するという作業を導入する。そして、生徒が積分に関して、微分の逆演算としての計算だけに目が向いてしまうことがないように積分の基本的なとらえ方の理解を図ることをねらいとした。

### 2 教材の工夫

#### (1) コンピュータを用いた実習について

平成15年度より、教科「情報」が必修科目になることを背景に、これからは「情報」だけではなく、あらゆる教科の授業でコンピュータをより積極的に活用することが可能となる。また、積分の“細かく分けたものを集める”というイメージを理解するためには、単純かつ膨大な計算を実行する必要があるため、そのためにコンピュータを利用し、比較的多くのパソコンにインストールされている表計算ソフトを活用することを検討した。しかし、その拡張性の高さから、授業で活用するには多くの障害があり、それらを解決するため以下のような工夫を行った。

#### ア 表計算ソフトの基本操作

コピー、ペーストの方法、数式入力、「SUM 関数」などが、本実習の作業で必要となる操作であるが、これらの機能に限定したマニュアルを作成、配布し指導する。

#### イ ワークシートについて

作業内容を明確にするため、表計算ソフトでのパソコン画面と形式が一致するワークシートを用意する。生徒は図形を分割して近似した長方形の面積を、小さな分割数の場

合について、まずパソコンを使わずに算出し記入する。その後、表計算ソフトによる計算結果がワークシートと一致することを確認する。

#### ウ グラフ機能について

表計算ソフトで、値が表示されている列を指定し、ツールバー上の「グラフアイコン」をクリックすると、特に難しい設定をすることなく、棒グラフを表示させることができる。棒グラフの表示は、実際に長方形の面積を足しているというイメージを視覚化するために欠かせない機能であり、分割数の増加に伴って長方形の1本1本が細かくなり、実際に求めたい図形の形状に近づいていくことを確認する。

#### (2) 「定積分と面積の関係」について

現行の教科書では、定積分を面積との関係から説明し、その具体的なイメージを与えるものがほとんどである。しかし、面積が扱われると同時に定積分の定義が行われ、さらに定積分で面積が求められることが実感を伴わない単なる数式上の操作のみによって示されると、「求積＝定積分の計算」という結論だけが印象づけられる結果になってしまう。それでは、求める面積を定積分で表すことが軽視され、計算のみに目が向いてしまう生徒が多くなる。また、定積分が単なる計算問題となり、意欲的に取り組むことができない。

そこで、次の①～④の学習段階を明確にした。

- ① 曲線図形（曲線部分を含む図形）の求積について考える。
- ② 面積を表す関数  $S(x)$  の導関数が、図形の高さを表す関数  $f(x)$  に等しいこと、すなわち  $S'(x) = f(x)$  であることを理解する。
- ③  $S(x) = \int f(x)dx$ （積分の図形的イメージ、記号の意味も含めた理解）
- ④  $S = \int_a^b f(x)dx$ （定積分の定義）

数学Ⅱの範囲では、数列の和の極限を求めるような区分求積法の詳細を扱うことは適切ではない。そのため本研究では、①について、表計算ソフトを用いて面積の近似値を実際に計算することにより、区分求積法の考え方に対する興味とその実感的な理解を深めることを試みる。また、②の理解を明確にすることは、現行の学習指導要領解説に記されている「積分の考えの指導は、既に学習した導関数の理解を深めることを中心としている。」ということに合致するものである。

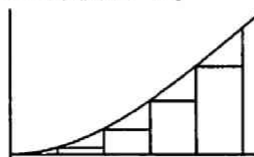
### 3 学習指導計画

- ア 不定積分（1時間）
- イ 不定積分の計算（2時間）
- ウ 曲線図形の求積法（1時間）－ 指導案（後述）
- エ 面積と定積分（1時間）－ 指導の要点（後述）
- オ 定積分の計算（2時間）



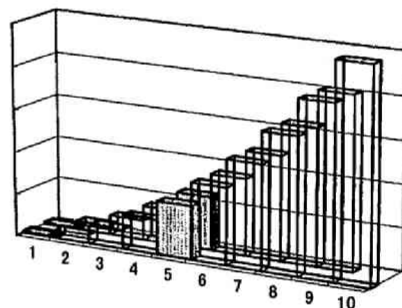
○ 学習指導の詳細

【学習指導計画のウ】指導案 目標：区分求積法の考え方をを用いて、曲線図形の面積を求めることを理解する。また、表計算ソフトにより区分求積法の考え方による計算を実行し、面積の近似値を求める作業を通して、面積が「微少量の和の極限值」として捉えられることを理解する。

時間	指導内容	学習活動	指導上の留意点●・評価の観点○
導入	発問「曲線図形の面積を求めるためにはどうすればよいか。」	<ul style="list-style-type: none"> <li>・意見を出し合い、それぞれの方法の妥当性を検討する。</li> <li>・図形を分割する方法が最も適当であることを理解する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>●図形を糸で囲い、それを長方形に直すなどの方法を提案する。</li> <li>○積極的にアイデアを出したか。妥当性を理論的に検証できたか。</li> </ul>
展開	<p>① <math>y = x^2</math>, <math>x = 0</math>, <math>x = 1</math>、及び <math>x</math> 軸で囲まれた図形の面積について、図形を長方形に5分割し、実際に近似値(ア)、(イ)を求める。</p> <p>(ア)最小和 (イ)最大和</p> <p>②表計算ソフトを使って、①と同じ作業を行う。</p> <p>③10分割の場合について、②と同じ作業を行う。</p> <p>④分割数を大きくして、実際の面積の値がどのくらいになるか求める。</p> <p>④曲線を表す関数を変えてみよう。</p>	<p>・計算することにより、ワークシートの表を完成する。</p>  <p>・実際の面積の値は、最小和と最大和にはさまれた値であることを確認する。</p> <p>・セルに数式を入れるなど、表計算ソフトを活用する。さらに、棒グラフを表示させ、図形が短冊状に分割されている様子を確認する。</p> <p>・表の行を増やす、和の範囲を広げるなど、表計算ソフトの表を変化させる。</p> <p>・棒グラフから、分割が細かくなっている様子を確認する。50分割、100分割、…という具合に徐々に分割数を大きくする。</p> <p>「小数第2位の精度に上げよう。」</p> <p>・いろいろな関数で試してみる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>●ワークシートの表は、後の表計算ソフトによる表の形式と同様にして分かりやすくする。</li> <li>●最小・最大長方形、最小・最大和、<math>\Delta x</math>について理解させる。</li> <li>●簡単のため、表計算ソフトの設定を予めしておく。</li> <li>●変化させるべき箇所を確認する。</li> <li>●分割数を大きくしすぎると記憶容量の制限から、処理できなくなる。</li> <li>○正確な値に近づけようと自発的に作業することができたか。</li> </ul>
まとめ	<p>①作業内容を確認する。</p> <p>②どんなことに気付いたか。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・曲線図形を長方形に切り分け、それぞれの断片の面積の値を加えることによってその近似値を求めることができる。</li> <li>・面積の値は、分割数を大きくすることによって最大和と最小和にはさまれ、実際の値に近づいていく。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ワークシートを完成させることができたか。</li> <li>○減少関数での場合など、新しい気づきがあったか。</li> </ul>

【学習指導計画のエ】指導の要点 目標：面積を「微少量の和の極限值」と捉えること（前時間）から発展し、「面積を表す関数  $S(x)$  の  $x = p$  における微分係数は、 $x = p$  における図形の高さ  $f(p)$  に等しい。」ことを理解する。さらに「微積分の基本定理」により、面積が積分の計算を用いて求められることを理解する。

① 表計算ソフトの棒グラフにより、前時間の10分割の例について、5本目の最大及び最小長方形（右図では、前後に重なっている）を示す。



② 分割数が大きくなると、この5本目の断片はどのようなになるのか。

$$\begin{array}{ccc} \text{最小長方形} & \text{5本目の断片} & \text{最大長方形} \\ f(x_5)\Delta x < S(x_5 + \Delta x) - S(x_5) < f(x_5 + \Delta x)\Delta x \\ \text{高さ} \times \text{底辺} & & \end{array}$$

高さに注目するため、全体を底辺  $\Delta x$  で割ると

$$f(x_5) < \frac{S(x_5 + \Delta x) - S(x_5)}{\Delta x} < f(x_5 + \Delta x)$$

ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$  とすると

$$S'(x_5) = f(x_5)$$

【面積の微分】面積  $S(x)$  について、 $x = p$  における微分係数は、 $x = p$  における高さ  $f(p)$  に等しい。

すなわち  $S'(p) = f(p)$ 、導関数は  $S'(x) = f(x)$

③ したがって、 $S'(x) = x^2$

$$S(x) = \int x^2 dx \quad \leftarrow \text{積分記号は、} x^2 \Delta x \text{（高さ} \times \text{底辺）の無限和を意味する。}$$

$$= \frac{x^3}{3} + C$$

ここで、 $S(0) = 0$  より、 $C = 0$

3D グラフによる最大・最小長方形

$$S(x) = \frac{x^3}{3}$$

④ 定積分の定義を行う。

『評価の観点』

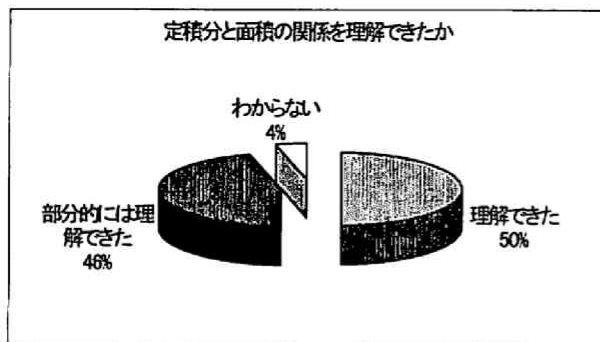
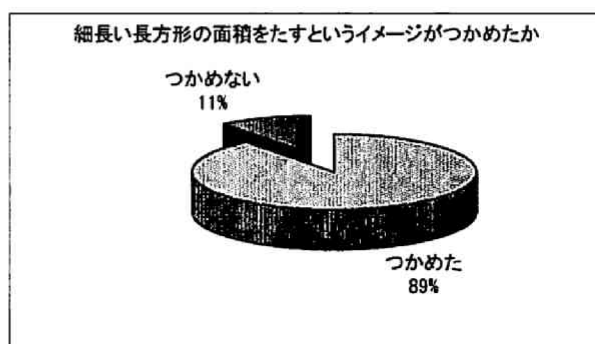
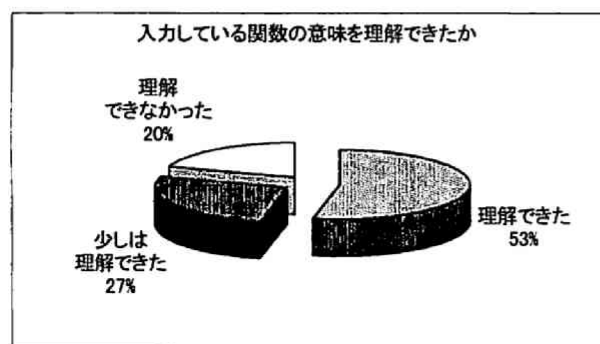
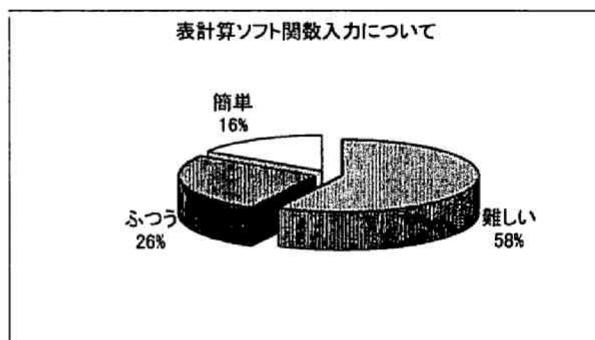
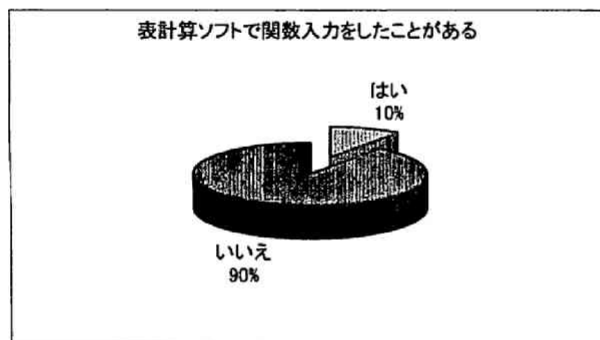
・最大・最小長方形、最大・最小和、 $\Delta x$  の概念を理解しているか。

【面積の微分】の内容に関心を持つことができたか。



#### 4 アンケート調査の結果と分析

アンケート調査は、全日制普通科1校で実施し、有効回答数は57名であった。アンケートの設問及び回答結果は次のとおりである。



生徒が、理解でき印象に残った関係式

$$f(x)\Delta x < S(x+\Delta x) - S(x) < f(x+\Delta x)\Delta x \quad \text{又は} \quad f(x) < \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x) \quad 53\%$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x) \quad 35\% \qquad S'(x) = f(x) \quad 12\%$$

生徒が、理解に苦しんだ関係式

$$f(x) < \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x) \quad \text{から、} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x) \quad \text{への変形} \quad 12\%$$

微分の定義を忘れていた 6%       $f(x)\Delta x < S(x+\Delta x) - S(x) < f(x+\Delta x)\Delta x$  3%

アンケートの結果からわかるように、表計算ソフトを使用したことのある生徒は非常に少ない。数式入力に関しても「難しい」と答えた生徒が多く、表計算ソフトの基本操作に関する指導は予想以上に困難であった。本授業の目的は、表計算ソフトの操作を学習することではなく、積分の図形的イメージをとらえることであるため、表計算ソフトの基本操作で労力を費やしてしまうと、本来の目的がぼやけてしまうという問題がある。

しかし、「細長い長方形の面積を足す」というイメージをつかめたと答えた生徒が多かったのは、数式の内容が「和」と「積」のみで構成されているため、操作の中身が比較的理解しやすいこと、また、棒グラフの表示に煩雑な設定がいらず、容易であったことなどが影響していると考えられる。

定積分と面積の関係については、 $f(x)\Delta x < S(x+\Delta x) - S(x) < f(x+\Delta x)\Delta x$  の関係式が理解でき、印象に残ったという生徒が多く、これは表計算ソフトによる実習の成果であると考えられる。しかし、調査結果からもわかるように「はさみうちの原理」を使って

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

の関係式を導く部分や、微分の定義に関する理解が十分でなかったために証明の理解が困難な生徒もいた。これについては、証明を行う前に既習の基本事項を確認するという方法をとったのだが、今回の指導方法では式変形に関しては個人の能力に依存する部分が多く、表計算の実習で補うことのできない課題を残している。

## 5 まとめと今後の課題

今回、私たちは、積分が微分の逆演算であり、定積分の計算に具体的なイメージを与えるために面積を扱うという方法を発展させ、面積をより具体的に扱い、生徒が積分そのものに対するイメージをもつことができるようにした。検証授業において、生徒は「積分が細かく分けたものを足すものである」というイメージをとらえることができ、表計算ソフトによる実習に取り組む姿勢から、このことが生徒の興味・関心を喚起することに有効であったことは明らかである。

また、指導法の工夫として、具体的なイメージをより鮮明にもたせるために活用したコンピュータが有効であることを実感した。生徒にとって、表計算ソフトを用いた作業は、具体的な数値計算に止まるものではなく、定積分で面積が求められることを証明するときに登場する、 $\Delta x$ 、最大和、最小和、はさみうちなどの様々な概念を理解するのに非常に役立った。さらに、「500分割」という膨大なデータの計算をすることにより、黒板や口頭での説明が困難であった「微小」や「無限大」のイメージを伝えるのにも表計算ソフトが有効であった。

今後、この積分の図形的な面積のイメージをもつことを基盤においた指導方法を整理、修正し、このような指導が具体的な問題解決に対してどのように影響するのかを検証していきたい。

### <引用・参考文献>

- ・文部省（1989）高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編 ぎょうせい
- ・大学への数学 臨時増刊号（1990）東京出版