

高等学 校

平成22年度

教育研究員研究報告書

数学部会

東京都教育委員会

はじめに

東京都教育委員会は、平成22年度から新たに幼稚園・小学校・中学校・高等学校の教員を対象に教育研究員を設置し、平成17年度まで50期にわたって行ってきた教育研究員事業を6年ぶりに復活させました。この事業は、教育研究活動の中核となる教員を養成することによって、東京都全体の教育の質を向上させることを目的としています。各教育研究員には1年間の研究活動を通して組織的な研究活動の在り方を身に付け、これからの東京都の教育研究活動の推進者となることが期待されています。

平成20年3月に告示された幼稚園・小学校・中学校学習指導要領に続き、平成21年3月に高等学校学習指導要領が告示され、全ての校種が新しい学習指導要領の本格実施あるいは本格実施に向けての移行期間に入りました。このことを受けて、平成22年度の教育研究員の共通テーマは「新学習指導要領に対応した授業の在り方について」とし、研究の柱が改訂された学習指導要領であることを明確にしました。また、今回の学習指導要領改訂の大きなポイントの一つである「言語活動の充実」については、全ての校種・部会の研究内容の中で取り組むこととしました。

これまで都教育委員会は、都立高校教育の充実・発展のために「生徒による授業評価」を活用した授業改善の促進や、進学指導重点校等での進学指導に関する協議会の開催など、生徒の学力を向上させるための取組を行ってきました。また、平成22年度からは、進学指導のマネージメントの定着を図る目的で、進学校における外部機関による進学指導診断を実施したり、学力向上に向けて実践的な研究を行う学校を指定し、高校入試結果の分析、学力向上推進プランの作成、学力調査問題の開発・実施・分析を通して学習指導の改善と充実を図ったりしてきました。

そこで、本年度高等学校の各部会においては、全校にわたる共通テーマに加え、「確かな学力の向上を図るための授業等の工夫についての実践研究」を高等学校全体のテーマとして設け、各部会において確かな学力を定義づけた上で、それぞれの研究主題を設定し、研究開発に取り組んできました。

この1年間、高等学校の全15部会、70名の教育研究員が、国語、地理歴史、公民、数学、理科、保健体育、芸術（音楽）、外国語、家庭、情報、農業、工業、商業、特別活動及び総合的な学習の時間の各教科等について、研究主題に基づいて研究を行い、協議を重ね、検証した内容を本報告書にまとめました。

各学校におかれましては、本報告書を有効に活用し、学力向上に向けた教科等の指導方法・内容の改善と充実に取り組んでいただくようお願いいたします。

平成23年3月

指導部高等学校教育指導課長

宮本 久也

目 次

I	研究主題設定の理由	1
II	研究の視点	1
III	研究の仮説	2
IV	研究の方法と意識調査の分析	2
V	研究の内容	4
VI	研究の成果	16
VII	今後の課題	16

研究主題	「数学的活動を重視し、学習意欲を高める指導法の工夫」
-------------	-----------------------------------

I 研究主題設定の理由

2003年PISA調査によると、「数学の授業が楽しみである（日本26.0% OECD平均31.5%）」、「数学で学ぶ内容に興味がある（日本32.5% OECD平均53.1%）」、「これからの数学でたくさんのことを学んで、仕事に就くときに役立てたい（日本47.1% OECD平均70.5%）」で、数学に対して興味・関心や楽しみを感じたり価値を見いだしたりする割合が諸外国と比較して低い傾向となっている。このことは近年の各種調査にも見られ、懸念されている。

平成20年1月の中央教育審議会の答申では、学習指導要領の算数・数学の改善の基本方針を「算数科、数学科については、その課題を踏まえ、小・中・高等学校を通じて、発達の段階に応じ、算数的活動・数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け、数学的な思考力・表現力を育て、学ぶ意欲を高めるようにする。」「根拠を明らかにし、筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する」、「子供たちが算数・数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにすることが重要である」などとしている。これを受けて、新しい高等学校学習指導要領数学科では目標を「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」と変更した。ここでは、「数学的活動を通して」を文頭に置き、目標全体に関係させることで数学的活動の重視を強調している。さらに、高等学校の数学的活動については、「自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。」を重視し、「コンピュータなどを積極的に活用することによって一層充実したものにすることができる。」と述べている。

これらのことを踏まえ、平成22年度の教育研究員高等学校数学部会では、「数学的活動を授業に意図的・計画的に取り入れることによって、数学が分かる喜びや学ぶ意義、有用性を実感させることで、数学に対する関心や学習意欲を高めることが大切である。」と考え、数学的活動を意図的・計画的に取り入れた授業の実践的研究を行うこととし、研究の主題を「数学的活動を重視し、学習意欲を高める指導法の工夫」とした。

II 研究の視点

我々は、「学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること」や「自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること」を授業に取り入れていくことで、数学が分かる喜びや学ぶ意義、有用性を実感させることができ、数学に対する関心や学習意欲を高めることができると考えた。

そこで、「数学I」の三角比を活用する授業でICT機器を活用し、図や写真、動画等の教

材を用いることで、生徒の興味・関心を高めさせた。そして既習事項を活用できるよう指導することで、数学を学ぶことの意義や有用性を実感させた。そして、身近な事象を取り上げ、それを数学化することで、より進んだ数学の課題に活用できるような場面を設定した。

また、「数学C」の背理法を用いて証明する授業の中で、一人の生徒が自らの解答を板書した後、その他の生徒にじっくり考えさせることや解答に疑問を感じたことを生徒に質問させること、他の生徒が考えた別解を提案させることなど、生徒相互の意見交換を促進するような場面を設定した。

本研究は、実践的研究を通して数学的活動が生徒の学習意識に与える効果を検証し、今後の指導法の工夫により、生徒の学習意欲を高めることを目的としたものである。

Ⅲ 研究の仮説

我が国の高校生は、数学の学習に対する積極性が乏しく、学習意欲が必ずしも十分ではない。このため、生徒に数学が分かる喜び及び数学を学ぶ意義や有用性を実感させることで、数学に対する関心や学習意欲を高めることが課題であると考えた。そこで、本研究では、「生徒が自ら課題を見出し、解決するための筋道を立てて考察・処理する、学習した内容を生活と関連付ける、及び自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明するなど、数学的活動を意図的・計画的に学習指導の中に取り入れる。このことで、数学に対する関心と主体的に数学を学ぼうとする意欲を高めることができる。」と仮説をたてた。

Ⅳ 研究の方法と意識調査の分析

1 研究の方法

前述の視点、仮説に基づき、以下の手順で研究を行った。

(1) 意識調査

本研究では、研究員の勤務校である単位制普通科、エンカレッジスクール、定時制、進学重点校等において、現在指導している生徒約 1000 人に事前の意識調査（表 1）を行った。

この調査を分析することで、東京都の高校生の現状を把握した。

(2) 検証授業

検証授業を行う学校の年間授業計画に即した単元の設定を行い、数学的活動を意図的に取り入れた授業を計画し、学習指導案に基づき検証授業を行った（実践事例Ⅰ及び実践事例Ⅱ）。

(3) 事後の意識調査

生徒の意識にどのような変化が見られたかを分析するために、事後にも意識調査を行い、事前の調査と比較して、意識の変化を分析した。

(4) 研究の成果と今後の課題

上記の結果を基に研究で得たことを総括し、成果と課題について考察を行った。

2 意識調査の分析

この調査で、質問 2（数学で学ぶ内容に興味がある。）、質問 3（数学で学んだことを仕事や実生活で役立てたい。）では、PISA 調査と同様の傾向が見られた。質問 1（数学の授業が楽しみである。）については OECD の平均よりやや高いが、過半数が否定的な回答をしている。

質問2（数学で学ぶ内容に興味がある。）で肯定的な回答をした生徒は、否定的な回答をした生徒に比べ質問1（数学の授業が楽しみである。）、質問3（数学で学んだことを仕事や実生活で役立てたい。）について肯定的な回答の割合が非常に高くなっていることが見られた。

一方、数学の内容に興味がある、なしにかかわらず、質問5（じっくり考える数学の授業が好きである。）、質問8（他の生徒の考え方を聞くと、理解が深まる。）、質問9（数学の問題を自分で理解しようとしている。）、質問10（数学では、途中の考え方が大切であると思う。）に肯定的な意見が多い。質問4（授業でみんなに説明することは好きである。）で否定的な回答の生徒が多いのに対して、質問8（他の生徒の説明を聞くと、理解が深まる。）で肯定的な回答の生徒が多いことが特徴的である。また、質問9（数学の問題を自分で理解しようとしている。）、質問10（数学では、途中の考え方が大切であると思う。）で肯定的な回答をした生徒の割合が高いことも全体的な傾向である。

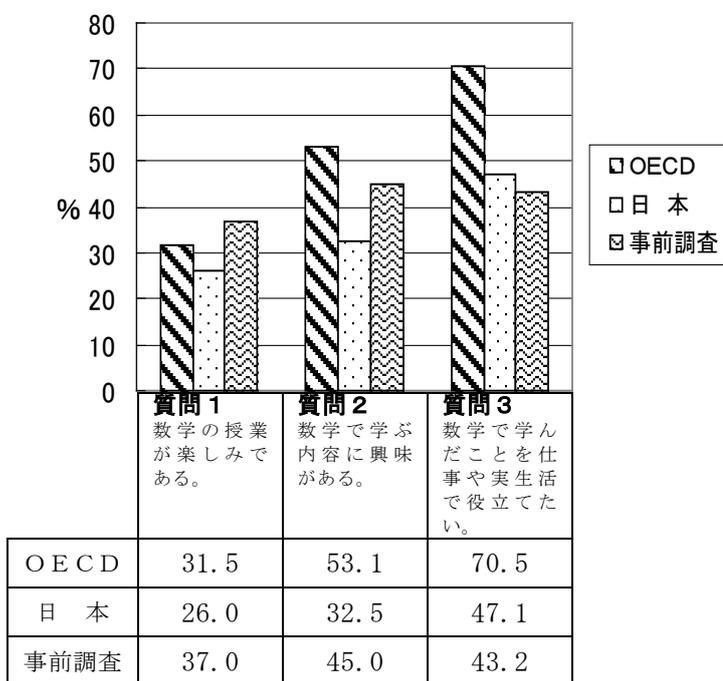
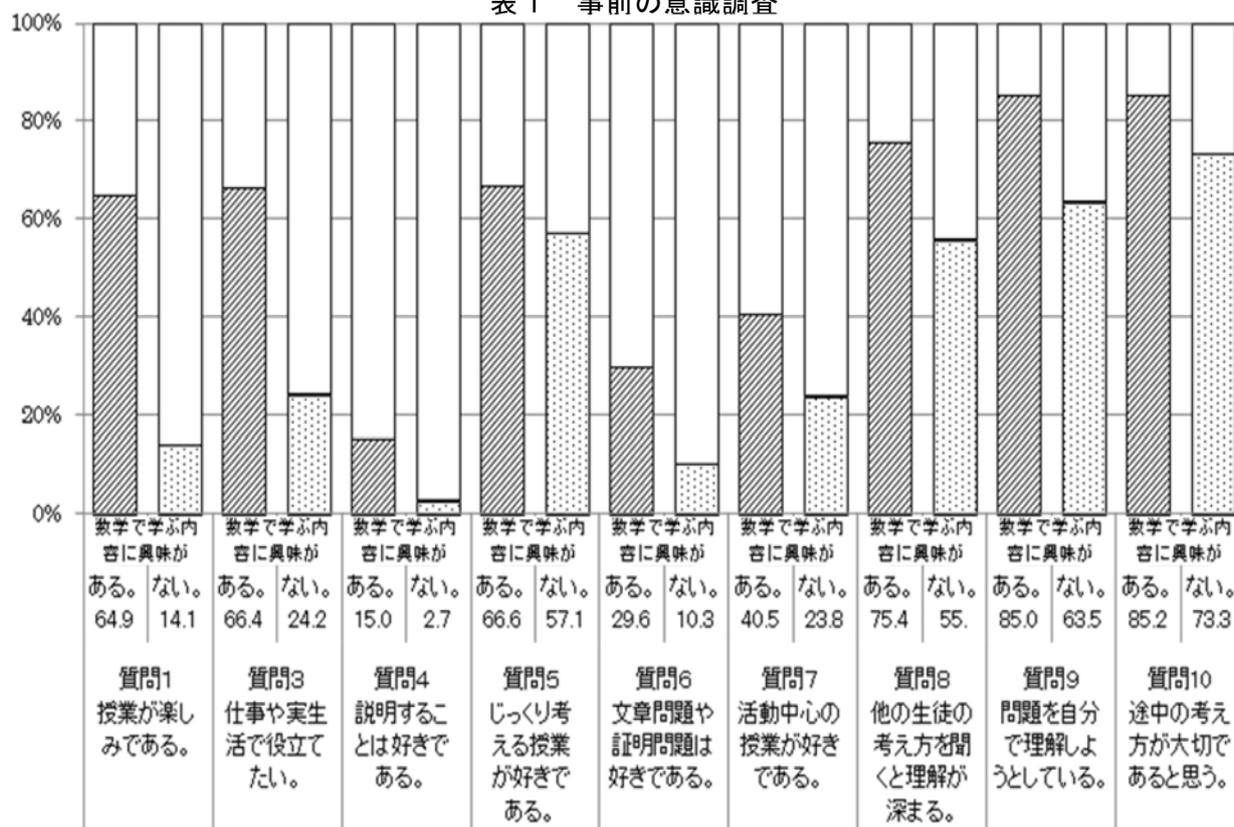


表1 事前の意識調査



V 研究の内容

1 研究構想図

全体テーマ

新学習指導要領に対応した授業の在り方について

高校部会テーマ

確かな学力の向上を図るための授業等の工夫についての実践研究

教科等の新学習指導要領のポイント

- ・ 数学学習の意義や有用性の一層の重視
- ・ 数学学習の系統性と生徒の特性等の多様化への配慮
- ・ 数学的な思考力や表現力を高めることへの配慮
- ・ 数学的活動の重視

教科等における確かな学力とは

- ・ 数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解
- ・ 事象を数学的に考察し表現する能力
- ・ 数学のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度
- ・ 数学的論拠に基づいて判断する態度

現状と課題

[現状]

国際的な比較において、我が国の高校生は数学の学習に対する積極性が乏しく、学習意欲が必ずしも十分ではない。

[課題]

数学が分かる喜び及び数学を学ぶ意義や有用性を実感させることで、数学に対する関心や学習意欲を高めることが課題である。

数学部会主題

数学的活動を重視し、学習意欲を高める指導法の工夫

仮 説

「自ら課題を見出し、解決するための筋道を立てて考察・処理する、学習した内容を生活と関連付ける、及び自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明するなど」、数学的活動を意図的・計画的に学習指導の中に取り入れることで、数学に対する関心と主体的に数学を学ぼうとする意欲を高めることができる。

具体的方策

- 1 図や写真、動画等の教材を活用することで、生徒が興味・関心を高め、学んだことを活用できるようにして、数学を学ぶことの意義や有用性を実感させる。
- 2 身近な事象を取り上げ、それを数学化することで、より進んだ数学の課題に活用できるようにする。
- 3 根拠を明らかにして、自らの考えを発表することや、他者の考えを聞くことで、数学的な思考力・表現力を育成する。

2 実践事例 I

科目名	数学C	学年	第3学年
-----	-----	----	------

(1) 単元（題材）名、使用教材（教科書、副教材）

行列（「改訂版数学C」数研出版、「チャート式基礎からの数学Ⅲ+C」数研出版）

(2) 単元（題材）の指導目標

行列の概念とその基本的な性質について理解し、数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに、連立一次方程式を解くことや点の移動等に活用できるようにする。

(3) 評価規準

	ア 関心・意欲・態度	イ 見方・考え方	ウ 技能	エ 知識・理解
単元 の評価 規準	行列に関心をもつとともに、数学のよさを認識し、それらの事象を積極的に活用しようとしている。	思考の過程を振り返り、多面的に考えることを通して、数学的な見方や考え方を身に付けている。	事象を数学的に表現・処理する仕方や証明するなどの技能を身に付けている。	行列における基本的な計算方法や法則等を体系的に理解し、知識を身に付けている。

(4) 単元（題材）の指導計画（14時間扱い）

時間	学習内容	学習活動	評価規準（評価方法）
第1～2時	行列の和・差・積	行列の演算について学ぶ。	行列を理解している。 （ア・エ 観察・演習）
第3～4時	積の交換法則が可能か否か、ハミルトン・ケリーの公式	交換法則、ハミルトン・ケリーの公式について学ぶ。	交換法則について理解している。 （イ プリント） ハミルトン・ケリーの公式を理解し、知識を身に付けている。 （エ 観察・演習）
第5～6時	逆行列、対角行列、 n 乗	n 乗するために対角化することを学ぶ。	行列を対角化する技能を身に付けている。 （イ・ウ プリント・机間指導）
第7～8時	連立一次方程式	逆行列と解の関係について学ぶ。	逆行列が存在しない場合について考察し、数学的に判断している。 （イ 観察・提出物）
第9時	点の対称移動	点の移動を学ぶ。	行列を活用して点を移動する技術を身に付けている。 （ウ プリント・机間指導）
第10時 （本時）	背理法	背理法等を用いた証明を学ぶ。	背理法のよさを認識し、活用しようとしている。 （ア 観察・発表・問いかける）
第11～12時	点の移動	行列の積と点の移動について学ぶ。	思考の過程を振り返り、数学的な見方や考え方を身に付けている。 （イ 机間指導・提出物） 行列の計算手順を身に付けている。 （ウ プリント・演習）
第13～14時	点の回転移動	行列による図形の移動・回転移動を学ぶ。	行列における基本的な計算方法や法則等を体系的に理解している。 （エ プリント・演習）

(5) 本時（全14時間中の10時間目）

ア 前時までの指導

1 学期の授業で行列の演算、ハミルトン・ケーリーの定理、逆行列、対角化と n 乗、連立一次方程式は学習している。本時に使用する事前学習課題（下記）を7月の授業ですでに提示しており、今回の授業で答合わせとレポート提出をすることを伝えてある。

イ 事前学習課題

問1	$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる2次の正方行列 A は存在しないことを証明せよ。
問2	A, B を2次の正方行列とするとき、次のことを証明せよ。 $AB = O$ かつ $B \neq O$ ならば、 A は逆行列をもたない。
問3	単位行列でない2次の正方行列 A について、 $A^2 = A$ が成り立つとき、 A は逆行列をもたないことを証明せよ。
問4	A, E, O は2次の正方行列で、 E は単位行列、 O は零行列とするとき、次のことを証明せよ。 $A^2 - 2A + E = O$ のとき、 $A - E$ は逆行列をもたない。
問5	2次の正方行列 P, Q について、次のことを証明せよ。 $PQ = O \Rightarrow P = O$ または $Q = O$ または $\Delta(P) = \Delta(Q) = 0$
問6	行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、次のことを証明せよ。 (1) $ad - bc \neq 0$ のとき、すべての自然数 n について $A^n \neq O$ (2) ある自然数 n について $A^n = O$ ならば $A^2 = O$

ウ 本時の目標

- (ア) 逆行列、零因子等の基本性質を理解した上で、背理法等の証明方法の有用性を認識する。
- (イ) 問題を理解した上で、証明を記述できるようになる。また、それを説明できるようになる。

エ 本時の展開（第10時）

過程	時間	学習内容	指導上の留意点	評価規準 (評価方法)
導入	5分	1 学期に習ったことについて復習し、課題の確認をする。	・「試行錯誤が大切で良い誤答例が全員のためになる。」ということ伝える。	・課題に積極的に取り組もうとしている。 (ア 観察・レポート)
展開		問1の解答を生徒に板書させ、説明させる。 【予想される生徒の解答】 問1 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ という A が存在すると仮定する。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおき、 $a^2 + bc = 0$ 、 $b(a + d) = 1$ $c(a + d) = 0$ 、 $bc + d^2 = 0$ から矛盾を導く。 他の生徒に質問させ、回答させる。	・1 学期に習ったことと少し違うことに気付かせる。 ・指名し、黒板で解答させる。 ・不十分な点について、答えさせる。	・背理法を用いて解答している。 (イ 机間指導) ・何と何が矛盾しているのかわかるように記述している。 (ウ 机間指導・発表)

展開	40分	<p>問1のポイントを確認した後、問2、3、4の解答を生徒に板書させ、説明させる。</p> <p>【予想される生徒の解答】</p> <p>問2 Aが逆行列をもつと仮定する。 $A^{-1}AB = A^{-1}O$、$EB = O$、$B = O$ 矛盾</p> <p>問3 Aが逆行列をもつと仮定する。 $A^{-1}A^2 = A^{-1}A$、$EA = E$、$A = E$ 矛盾</p> <p>問4 $A^2 - 2A + E = O$より $(A - E)^2 = O$ $A - E$は逆行列をもつと仮定する。 $(A - E)^{-1}(A - E)^2 = (A - E)^{-1}O$ $E(A - E) = O$ $A - E = O$ 矛盾</p> <p>他の生徒に質問させ、回答させる。 別解を提案させる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> どこをポイントにし、背理法の説明をするのか、また、成分計算をするのか、別解はないかなどについて問いかける。 A^2が出てくるので、ハミルトン・ケリーの公式で考えた生徒はいないか確認する。 交換可能な例や因数分解ができる例をあげさせる。 	<ul style="list-style-type: none"> キーワードを用いている。(ウ 観察・発表) 零行列は逆行列をもたないことを理解している。(エ 机間指導・レポート)
		<p>問5、6の解答を生徒に板書させ、解答の方針と解法を説明させる。</p> <p>【予想される生徒の解答】</p> <p>問5 $P = O$または$Q = O$のとき$PQ = O$は明らか。以下、$P \neq O$かつ$Q \neq O$の場合を考える。</p> <p>[1] $\Delta(P) \neq 0$と仮定する。 P^{-1}が存在するから前からかけて $P^{-1}PQ = P^{-1}O$、$EQ = O$、$Q = O$ 矛盾</p> <p>[2] $\Delta(Q) \neq 0$と仮定しても同様。</p> <p>問6</p> <p>(1) ある自然数nについて$A^n = O$と仮定する。 A^{-1}が存在するから $(A^{-1})^n A^n = (A^{-1})^n O$、$E = O$ 矛盾</p> <p>(2) ハミルトン・ケリーの公式より、 $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$ (1)の対偶より、ある自然数nについて$A^n = O$ならば $ad - bc = 0$ よって、①は$A^2 = (a + d)A$ $n = 1, 2$のとき明らか nが3以上の整数のとき②より $A^n = (a + d)^{n-2} A^2$ 条件より左辺が零行列ならば $a + d = 0$または$A^2 = O$ $a + d = 0$ならば②より$A^2 = O$ 以上より、いずれにせよ$A^2 = O$</p> <p>他の生徒に質問させ、別解を提案させる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 結論の「$P=0$または$Q=0$または$\Delta(P) = \Delta(Q) = 0$」の意味を問いかける。例えば$P=0$のとき$\Delta(P)$はどうだろうか。 ド・モルガンの法則に着目させる。 「すべて」を否定すると「ある」になることに気付かせる。 「A^{-n}とは書かない。」ことに気付かせる。 (2)は背理法でなく、対偶を用いて証明することに気付かせる。 等比数列の考え方を理解させる。 	<ul style="list-style-type: none"> 問題の意味を理解している。「または」で結ばれている三つの条件がどういう関係かを理解している。(エ 机間指導・レポート) 命題とその対偶の真偽は一致することを理解している。(エ 机間指導・観察)
まとめ	5分	<p>本時のまとめをする。 次回の授業内容の確認をする。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 読む力・書く力・説明する力、特に言語活動は数学以外でも大切なことを伝える。 	

(6) 本時の振り返り

行列は新学習指導要領では数学活用の中に入り、数学I、数学II、数学III、数学A、数学Bの科目の中では扱われなくなる。しかし、生徒が根拠を明らかにして、自らの考えを説明する

活動の一つとして背理法の説明が適しているということ並びに検証授業を実施する学校の授業計画に即しているということから、今回の題材として取り扱うこととした。

ア 授業の工夫

日頃から生徒に予習することを指導し、生徒にとって間違いやすいところや大切なところを中心に指導している。特に今回の授業内容は証明方法が一通りでないため、一人の生徒の解答の後、他の生徒の発言が期待できる教材であった。今回、生徒が黒板に解答するとともに、説明した。その後、その解答と説明について質問を受ける時間を十分に確保した。そのため、一部の解法が終わらなかった。

イ 今回の授業に対する評価

表2 実践事例Ⅰの事前アンケートと事後アンケートの比較

		そう思う		どちらかという そう思う		どちらかという そう思わない		そう思わない	
		前	後	前	後	前	後	前	後
質1	本日の授業が楽しかった。	0.0	11.8	60.0	64.7	20.0	17.6	20.0	5.9
質2	数学で学ぶ内容に興味がある。	0.0	5.9	53.3	52.9	26.7	29.4	20.0	11.8
質3	仕事や実生活で役立てたい。	0.0	5.9	53.3	29.4	20.0	35.3	26.7	29.4
質4	みんなの前で説明するのが好きである。	0.0	5.9	13.3	17.6	33.3	29.4	53.3	47.1
質5	考える時間が長い授業が好きである。	20.0	17.6	53.3	52.9	20.0	23.5	6.7	5.9
質6	証明問題が好きになった。	6.7	23.5	6.7	17.6	53.3	52.9	33.3	5.9
質7	作業・活動中心の授業が好きである。	0.0	11.8	40.0	35.3	33.3	35.3	26.7	17.6
質8	他の解き方を聞いて理解が深まった。	26.7	41.2	53.3	47.1	13.3	11.8	6.7	0.0
質9	文章を自分で理解しようとしている。	20.0	47.1	73.3	41.2	6.7	11.8	0.0	0.0
質10	答よりも途中の考え方が大切である。	53.3	52.9	46.7	41.2	0.0	0.0	0.0	0.0

(単位は%)

ウ 個々の問に関して

問1を解答した生徒は、 $a^2 + bc = 0$ - ①、 $b(a+d) = 1$ - ②、 $c(a+d) = 0$ - ③、 $bc + d^2 = 0$ - ④の4つの式がでたあと、 $a+d=0$ または $a+d \neq 0$ と場合分けすることができた。なぜそのように考えたのか解答した生徒に問いかけたところ、「四つの式を見比べて、似たような形が出る場所や、掛けて0になるところが気になる。」という意見が出た。このことにより、生徒の発表を基に他の生徒に証明方法のきっかけを与えることができた。

事前に想定していた解答と実際に生徒が黒板に書いた解答は下記のとおりである。

教員が想定した解答	生徒が書いた解答
$a+d=0$ と仮定すると	$a+d \neq 0$ と仮定すると
②式に反する。よって $a+d \neq 0$	③式より $c=0$
③式より $c=0$ 、①式より $a=0$	①式より $a=0$ 、仮定より $d \neq 0$ となるから
さらに、④式より $d=0$ となり矛盾	④式に反するので矛盾

問2と問3は想定していたとおりの解答と説明であった。しかし、問2に関しては、成分計算をして $ad - bc = 0$ を導き、解く方法を提案する生徒がいた。数学的活動という授業の趣旨から、その生徒にも発表させたかったが時間の関係からそれができなかった。後日、全員

にレポートを提出させ、指導を行った。

問4は、 $A-E$ が逆行列をもつと仮定し、証明を進めていくと、 $A-E=O$ となってしまう、矛盾が生じた。そこで、発表した生徒は、「仮定の逆である。」と黒板に書いた。この生徒は「逆」という言葉を日常的な意味で使用した。しかし、数学の用語で「逆」というと命題の単元で学習する逆・裏・対偶の「逆」のことで、ここで使用する用語としては適切でない。言語活動を豊かにするため、その前提として、生徒が正確な用語を使うことは、数学の指導において極めて重要であり、具体的な内容の取扱いを通して、その意味や内容が十分に理解できるように指導した。当初、解答した生徒は $A-E=O$ が矛盾とし、証明を終わらせると想定していた。しかし、指導を行う過程で、もう一度両辺に $(A-E)^{-1}$ を掛けて、 $E=O$ と変形して矛盾を導き出し、証明を終了した。

エ 数学的活動

事前アンケートの自由記述の中で、「皆の前で説明することは恥ずかしい。」「緊張する。」「失敗が怖い。」などの記述があった。このため、今回の検証授業の冒頭に「授業では大いに失敗して良い。」「試行錯誤が大切で良い誤答例が全員のためになる。」ということ伝え、生徒の意見や質問、疑問を大切にしながら授業を進めた。この指導により、質問8（他の生徒の考えを聞くと、理解が深まる。）の回答で、「そう思う」または「どちらかというと思う」（以下、肯定的な回答と表記する。）と回答した生徒が事前アンケートでは80.0%であるのに対して、事後アンケートでは、88.3%と8.3ポイント上昇した。これは、生徒の素朴な疑問や誤答を指導の中で丁寧に扱うことが、生徒の理解を促したと考える。

オ 数学のよさ

質問4（授業でみんなに説明することは好きである。）で肯定的な回答をした生徒が事前アンケートでは13.3%であったのに対して、事後アンケートでは、23.5%と、10.2ポイント上昇した。また、質問6（数学の文章問題や証明問題は好きである。）で、肯定的な回答をした生徒が事前アンケートでは13.4%であったのに対して、事後アンケートでは、41.1%と、27.7ポイント上昇した。これは、課題設定が適切であったことと生徒自身の言葉で説明する時間を十分に設定できたことが大きな要因であると考えられる。

質問3（数学で学んだことを仕事や実生活に役立てたい。）で肯定的な回答をした生徒が事前アンケートでは53.3%であったのに対して、事後アンケートでは、35.3%と、18.0ポイント減少した。今回の授業の内容を、「日常生活の中で役立てることができる。」ということを生徒に伝えることができなかつたため、否定的な回答が多かった。しかし、事後アンケートの自由記述の中で、「もし…だったら」と仮定することで結論も複数予想され、どちらに進めていったらよいか仮定して、説明するような場面でも有用である。」と書いた生徒もいた。



図1 生徒が説明している様子



図2 生徒が説明している様子

3 実践事例Ⅱ

科目名	数学Ⅰ	学年	1学年
-----	-----	----	-----

(1) 単元（題材）名、使用教材（教科書、副教材）

三角比（「数学Ⅰ」第一学習社、「ウィング」第一学習社、ワークシート）

(2) 単元（題材）の指導目標

鋭角における正接、正弦及び余弦の意味を理解させ、実践的な問題を通して用語・記号等に慣れるよう指導し、三角比の有用性について実感させる。

(3) 評価規準

	ア 関心・意欲・態度	イ 見方・考え方	ウ 技能	エ 知識・理解
単元の評価規準	三角比に関心を持ち、直角三角形の計量に用いようとしている。	事象を数学的に考察し表現したり、発展的に考えたりすることを通して数学的な見方や考え方を身に付けている。	三角比の性質を使って、辺の長さを求める方法等を身に付けている。	直角三角形において、正弦・余弦・正接の定義を理解し、知識を身に付けている。

(4) 単元（題材）の指導計画（6時間扱い）

時間	学習内容	学習活動	評価規準（評価方法）
第1時	三角比の定義	正接・正弦・余弦の定義を学ぶ。	直角三角形の角の大きさによって辺の比の値が定まることを根拠に基づき判断しようとしている。 （ア 観察） 三角比を使い、辺の長さや角の大きさを求める方法を身に付けている。 （ウ プリント）
第2時	三角比の活用	正接・正弦・余弦の活用の仕方を学ぶ。	三角比の値を利用して、高さや距離を求める方法を身に付けている。 （ウ 机間指導） 問題の文章を読み取り、位置関係や形状をイメージしている。 （イ プリント）
第3～4時 （本時）	三角比の活用 （実践）	正接・正弦・余弦を用いて建物の高さを測る。	影の長さを図ることにより、建物の高さを計算する方法を身に付けている。 （イ、ウ プリント・机間指導）
第5時	三角比の 相互関係	三角比の一つがわかっているとき他を求める。	相互関係を理解し、辺の長さや角を求める方法を身に付けている。 （エ プリント） 関数や方程式の式変形に利用する方法を身に付けている。（ウ 観察）
第6時	三角比の拡張	座標による三角比の定義を学ぶ。	鈍角の三角比の定義を理解し、知識を身に付けている。（エ 観察） 円の利用目的と利用法や考え方を身に付けている。（イ プリント）

(5) 本時（全6時間中の3～4時間目）

ア 本時の目標

- (7) バーチャル地球儀ソフトを使って、航空写真に写っている建物の影の長さから、建物の高さを計算する方法を身に付ける。
- (イ) バーチャル地球儀ソフトや表計算ソフトの使い方や計算の仕方等についてグループで議論し、解答を導き出す方法を身に付ける。
- (ウ) 三角比を用いて、写真に写った影の長さから建物の高さを計算する活動を通して、数学の有用性を実感する。

イ 本時の展開（第3時）

過程	時間	学習内容	指導上の留意点	評価規準 (評価方法ア～エ)
導入	5分	タレスの定理他タレスの残した業績を学び、証明を試みる。	<ul style="list-style-type: none"> ・証明と式変形は違うことを再度確認させ（既知の事柄のみを用いて未知の事柄を導き出す。）、証明する際の考え方を理解させる。 ・数学の歴史を知ることによって数学への理解を深めるとともに、数学への興味・関心を高めさせる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・証明の手順を身に付けている。 (エ 観察) ・歴史を知り、歴史から得た知識を生かそうとしている。 (ア 観察)
展開	40分	<p>グループに分かれて、タレスがどのような方法でピラミッドの高さを測量したか考え、議論する。</p> <p>建築用 3D CAD ソフトで影の長さを計測し、ピラミッドの高さを求める。</p>	<p><ピラミッドの高さの測量></p> <ul style="list-style-type: none"> ・どこに相似な三角形ができるか考えさせる。 ・動画を用いて、影の長さが重要であることを理解させる。 ・自発的に発表者が出るようにする。 ・影の先端を特定し、長さを測らせる。 <p>※測量作業がうまく進んでいるグループがあれば、どのように進めたか、他のグループにアドバイスさせる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・積極的に意見を述べ、話し合いに参加しようとしている。 (ア 発表) ・ピラミッドの高さを求める方法を身に付けている。 (ウ 提出物)
		<p>タレスがどのような方法でピラミッドの影の長さを測ったか考える。</p>	<p><タレスの用いた方法></p> <ul style="list-style-type: none"> ・ピラミッドの中心から影の先端まで、どのようにすれば長さが分かるか考えさせる。 ・自発的に発表者が出るようにする。 	<ul style="list-style-type: none"> ・タレスが用いた方法を考えようとしている。 (ア 発表) ・積極的に意見を述べ、話し合いに参加しようとしている。 (ア 観察)
まとめ	5分	<p>次回の授業で行う作業の内容を学ぶ。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・写真を撮影した位置（緯度・経度）と日時が分かれば、その時の太陽の高度を計算することができることを理解させる。 ・地球から見た太陽がどのような動きをしているか考えさせる。 <p>※難しい計算を行うので、資料をよく見て作業手順を考えておくよう指示する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・地球から見た太陽の動きを理解しようとしている。 (イ 提出物)

ウ 本時の展開（第4時）

過程	時間	学習内容	指導上の留意点	評価規準 (評価方法ア～エ)
導入	5分	前回の内容を復習し、本時の作業内容を確認する。	<ul style="list-style-type: none"> 地球から見た太陽の動きを再度確認させる。 動画を用いてイメージさせる。 	<ul style="list-style-type: none"> 本時の目的と手順を理解しようとしている。 (ア 観察)
展開	40分	<p>バーチャル地球儀ソフトから影の長さや方向、撮影日時等を調べる。</p> <p>影の長さを発表する。</p>	<p>＜自由の女神の高さを測る＞</p> <p>※測量作業がうまく進んでいるグループがあれば、どのように進めたか、他のグループにアドバイスさせる。</p> <ul style="list-style-type: none"> 太陽高度の求め方を考えながら、前もって用意した表計算ソフトを使って計算させる。 	<ul style="list-style-type: none"> 測量の方法について理解しようとしている。 (イ 観察) 建物の高さを計算する方法を身に付けている。 (ウ 発表)
		<p>求めたデータを建築用3D CADソフトに反映させ、高さを確かめる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> バーチャル地球儀ソフトと建築用3D CADソフトを使って計算結果を確かめさせる。 	
		<p>どの建物の高さを測るか話し合う。</p> <p>計測するため建物の経度、影の長さや方向及び撮影日時を読み取る。</p> <p>調べたデータを表計算ソフトに入力し、太陽高度を求める。</p> <p>太陽高度と影の長さから建物の高さを求める。</p> <p>測量結果を発表する。</p> <p>建物の実際の高さと計算で求めた高さの誤差について考える。</p>	<p>＜自分の好きな建物の高さを測る＞</p> <p>※影の長さを測りやすい建物を選ぶ（先端が分かりやすい、周りに建物がないなど）よう指示する。</p> <ul style="list-style-type: none"> 太陽の年周運動を日周運動に見立てて、前もって用意した表計算ソフトを使って太陽高度を計算させる。 <p>※必要に応じて机間指導する。</p> <p>※測量作業がうまく進んでいるグループがあれば、どのように進めたか、他のグループにアドバイスさせる。</p> <ul style="list-style-type: none"> バーチャル地球儀ソフトと建築用3D CADソフトを使って計算結果を確かめさせる。 インターネットで建物の高さを調べる。計算で出した値が違えば、どこに原因があるか考えさせる。 	<ul style="list-style-type: none"> 建物を選ぶとき、計算しやすいように工夫しようとしている。 (イ 机間指導) 建物の高さを測る方法を数学的な考え方を身に付けている。 (イ 提出物) 建物の高さを計算する方法を身に付けている。 (ウ プリント・机間指導)
		<p>太陽高度の求め方を学ぶ。</p>	<p>＜太陽の高度を求める＞</p> <ul style="list-style-type: none"> 図を参考に、ワークシートの手順に従って、太陽高度を計算させる。 x、y、z からどのようにすれば太陽の高度を計算できるか考えさせる。 <p>※時間内に計算が終わりそうもない場合は、簡単に説明を加え、各自で考えてみるよう指示する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 補助線等を用い、長さを計算する方法を身に付けている。 (ウ 机間指導) 太陽の高度を計算する方法を身に付けている。 (ウ プリント)
まとめ	5分	三角比により、様々な長さや高さを求めることができることを確認する。	<p>※現在、実際に測量現場で「三角測量」が行われており、三角比を用いた測量法であることを付け加える。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 三角比の活用法を身に付けている。 (エ 机間指導) 実際に三角比が活用されていることを理解し、知識を身に付けている。 (エ プリント)

(6) 本時の振り返り

ア 今回の授業に対する評価

表3 実践事例Ⅱの事前アンケートと事後アンケートの比較

		そう思う		どちらかという そう思う		どちらかという そう思わない		そう思わない	
		前	後	前	後	前	後	前	後
質1	本日の授業は楽しかった。	7.5	28.2	17.5	61.5	50.0	7.7	25.0	2.6
質2	数学で学ぶ内容に興味がある。	12.8	17.9	28.2	46.2	46.2	28.2	12.8	7.7
質3	仕事や実生活で役立てたい。	5.0	17.9	32.5	51.3	52.5	25.6	10.0	5.1
質4	みんなの前で説明するのが好きである。	0.0	2.6	0.0	15.8	37.4	52.6	62.5	28.9
質5	考える時間が長い授業が好きである。	17.9	21.1	48.7	57.9	25.6	13.2	7.5	7.9
質6	証明問題が好きになった。	5.0	5.1	22.5	33.3	35.0	48.7	37.5	12.8
質7	作業・活動中心の授業が好きである。	10.0	12.6	17.5	61.5	57.5	15.4	15.0	10.3
質8	他の解き方を聞いて理解が深まった。	17.5	17.9	55.0	69.2	22.5	12.8	5.0	0.0
質9	文章を自分で理解しようとしている。	12.5	15.4	72.5	69.2	12.5	12.8	2.5	2.6
質10	答よりも途中の考え方が大切である。	32.5	51.3	50.0	41.0	7.5	5.1	10.0	2.6

(単位は%)

イ 情報の収集と活用

新高等学校学習指導要領の数学Ⅰ及び数学活用でデータの分析が取り扱われ、資料から情報を読み取ることやその情報を活用する能力の育成が求められている。そこで、建築用3D CADソフトを利用し、三角形の相似を活用してピラミットの高さをどのようにして測ったのかを復習した。そして、バーチャル地球儀ソフトから経度、影の長さ、方角及び撮影日時を読み取り、表計算ソフトで太陽高度等を計算させた後、三角比を用いて建物の高さを計算させた。その後、時間があれば、表計算ソフトを使用せず、計算によって太陽高度を求めさせる計画を立てていた。検証授業時、生徒に発表する時間を十分にとったため、計算手順の説明だけになってしまった。今後は、指導内容と説明方法について精査を行っていく。

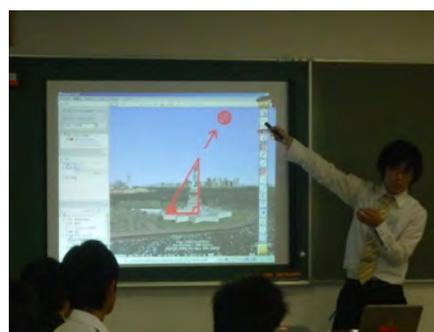


図3 バーチャル地球儀ソフトの活用

中学校の数学の授業においても相似な三角形の性質を用いて、角度を測り実際に相似な三角形をかいて長さを測ることで、建物の高さを計測するという学習を行っている。高校では三角比の表を用いて値を計算する。角度によって高さが決まるという考え方を学び、生徒は「三角比が仕事や実生活に役立つ。」ということを実感することができた。このため、アンケートの質問3(数学で学んだことを仕事や実生活で役立てたい。)で肯定的な回答をした生徒が事前アンケートでは37.5%であったのに対して、事後アンケートでは62.2%となり、31.7ポイント上昇した。この結果より、情報を収集し、活用することの必要性及び三角比の有用性を実感させることができたと考える。

ウ 図や写真、動画等の活用

言葉だけでは説明が難しい内容について、電子情報ボードを用いて視覚的な説明を行った。第3時においてはタレスがどのような方法を用いてピラミッドの高さを測ったか、実際に影の長さを測るためにはどのような問題があるかの説明に動画を活用した。また、第4時においては、どのような計算を行えば自由の女神の高さを求められるかと、計算に必要な太陽の高度を出すために太陽と地球がどのような運動をしているかを動画によって説明した。今回の授業は動画を活用したことが大きな特徴であった。これら



図4 手順の説明

のことににより質問1で肯定的な回答をした生徒は事前アンケートでは25.0%であったのに対して、事後アンケートでは89.7%となり、64.7ポイントも上昇した。これは動画をを用いた授業が有効であったことを表している。また、研究主題にある「学習意欲を高める指導法の工夫」としてとても大きな成果があると考えられる。

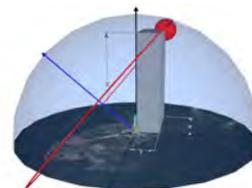
エ ワークシート

図や写真、動画等は単に見せるだけでは、その場限りの盛り上がりで終わってしまい、知識として残らない。そこで、映像とワークシートをリンクさせ、映像を見ながらワークシートに書き込むことで、知識を身に付けさせた。

バーチャル地球儀ソフトで建物の高さを測ろう！

バーチャル地球儀ソフトを使うと、世界中の航空写真を見ることができます。その写真には建物の影が映っており、その建物がある場所の緯度、経度そして写真の撮影日を知ることができます。影の長さを測ることもできます。建物の先端と影の先端を結んだ線の地面に対する角度が分かれば、三角比を使って高さを求めることができます。

Data 1 緯度：約 °、経度：約 °
Data 2 撮影日：月日（ほぼ夏至と考えて差し支えないでしょう）
Data 3 影の長さ：m、←重要！
Data 4 影の方角：度（北を0°としています。）
Data 5 これから、撮影時刻の高度を求めると、約 °です。
Answer 高さは、影の長さ×tan° = mです。



オ 理由や根拠を明らかにしての証明

第3時において、タレスの定理他、タレスの残した業績についても整理し、生徒にタレスの定理について証明の仕方を議論させ、代表者に発表させた。また、第4時において、計算結果が実際の高さよりも低めに出てきてしまう理由を議論させ、発問したところ、一人の生徒が自分から意見を述べた。ただし、全体的に見ると、議論そのものは活発に行っていたが、発表となると躊躇してしまい、なかなか発表者が出てこなかった。それでも最初の1問以外は、様々な声かけを行った結果、生徒が自主的に発表することができた。



図5 作業中の様子

質問4（授業でみんなの前で説明することは好きだ。）で肯定的な回答をした生徒は、事前

アンケートでは0.0%であったのに対して、事後アンケートでは18.4%に上がったが、低水準にとどまった。理由の記述を見ると、「説明する自信がない」や「恥ずかしい」などが圧倒的に多かった。日頃から問題演習時に「間違えても良いから自分の考えを書くことが大切である」、さらに「間違えることによって知識が深まる」といった話をしている。しかし、仮に間違えることが自分のためであることが分かっていたとしても、実際に他の生徒の前で説明したり、解答したりできるかというのは別問題のようである。質問8（他の生徒の考えを聞くと、理解が深まる。）で肯定的な回答をした生徒は事前アンケートでは72.5%であり、事後アンケートでも87.1%と回答する生徒の割合が高い率を維持していることから、生徒に積極的に説明させたり、解答させたりする機会を設けていくことが大切であることが分かる。

カ 数学的活動

グループで議論することも外的活動であるが、本授業ではコンピュータを利用して、建物の高さを測るといった外的活動を行った。あまり細かく指示を出し過ぎると生徒は「指示通りに作業をした」という感覚をもってしまう。また自分で考えて活動しなければ、自宅等で同じ活動を行おうとした場合にできないと考え、意識的に指示を必要最低限に留めた。コンピュータの扱いに関しては慣れている生徒が多く、画面で同じ手順を行ってみせず、口頭だけの説明にとどめたが、すべてのグループが建物の高さを求めるところまでたどり着いた。



図6 作業中の様子

質問7（活動中心の数学の授業が好きである。）で肯定的な回答をした生徒は事前アンケートでは27.5%であったのに対して、事後アンケートでは74.1%となり、46.6ポイントも上昇した。指導者から指示して、指示通りに作業をさせるのではなく、生徒が自ら考え、試行錯誤しながら、自主的な活動を通して答えにたどり着くことが重要である。

キ より自発的な活動を目指して

本授業では、バーチャル地球儀ソフトからデータを読み取り、用意した表計算ソフトのプログラムに数値を入力させることで高さを求め、すべてのグループが答えまでたどり着くことができた。しかし、数学の本当の楽しさは、今回、表計算ソフトのプログラムで計算した計算式を導き出す部分にある。当初は生徒の自由な発想を引き出し、生徒なりの独自の理論で計算させようとしたが、授業の流れを優先させ、計算には表計算ソフトを使用することにした。計算式を作るところから授業を行うことで、より生徒が自発的な活動を行うことまでには至らなかった。

ク 新たな教材開発

学習意欲を高めるために、ICT機器の活用が有効であることは確かめられた。2010年の春にタブレット型メディアプレーヤーが発売された。これにともない、既に資格試験用の参考書等はコンテンツが配信されている。教育現場においても、様々なツールを取り入れていくべきである。本授業ではバーチャル地球儀ソフトを活用し、好結果が得られた。今後とも継続して教材開発を行う必要がある。

VI 研究の成果

本部会では、2校での実践授業を通して、数学的思考力や表現力を向上させるために、数学的活動の一層の充実を図り、学習意欲を高める指導方法の工夫についての研究を行った。そして、事前アンケート及び事後アンケートを実施し、それらを分析し、今回の研究の成果について考察した。それらを以下に示す。

1 根拠を明らかにして発表することや他者の意見をきく場面の設定

根拠を明らかにして自らの解答を説明させることや、他の生徒が説明をした内容を聞かせることで、生徒に数学的な思考力・表現力を育成することができた。

2 身近な事象を取り上げた場面の設定

建築物等の高さ求めるために、太陽の高度と建物等の影の長さに着目し、三角比を活用して計算で求めた。これらのことで、三角比の有用性を実感させることができ、生徒の主体性を高めさせることができた。

3 ICT機器の活用

授業者の説明を最小限に抑えることで、生徒たちの意見交換が活発になり、課題解決に向けて筋道を立てて考察・処理するようにつながった。また、ICT機器を活用することにより、複雑な内容を分かりやすく説明することができた。また、既習事項を整理したりすることで生徒に数学を学ぶことの意義や有用性を実感させ、生徒は数学を主体的に学ぶ態度を身に付けることができた。

以上のことより、数学的活動を多くとり入れた指導を行うことは、生徒の思考力・表現力を育成するために有効である。また、生徒の解答をうまく活用しながら正確な表現（記述）を伝えて論理的な考察を進め、思考力・表現力を高めていく過程で学習意欲を高めることができた。

VII 今後の課題

今後、数学に興味のない生徒や教員の説明や解説を期待した受動的な態度の生徒を一人でも減らすために、数学的活動について教員間で共通理解を図り、数学的活動を段階的に取り入れた年間指導計画や評価計画を立てるとともに、毎時間の授業の中に、数学的な活動を取り入れて継続的に指導することで、生徒が自ら数学に対する関心と主体的に数学を学ぼうとする意欲を高めていく必要がある。

【参考資料】

- ・ 国立教育政策研究所編(2004)生きるための知識と技能OECD生徒の学習到達度調査2003年調査国際結果報告書②ぎょうせい.
- ・ 文部科学省(2009)高等学校学習指導要領
- ・ 文部科学省(2009)高等学校学習指導要領解説

平成22年度 教育研究員名簿

高等学校・数学

学校名	課程	職名	氏名
都立本所工業高等学校	定時制	主任教諭	中村 明
都立目黒高等学校	全日制	主幹教諭	○叶多 泰子
都立戸山高等学校	全日制	主任教諭	荻野 大吾
都立板橋有徳高等学校	全日制	主任教諭	梅川由美子
都立小金井北高等学校	全日制	主任教諭	鈴木 智秀
都立東村山高等学校	全日制	主任教諭	◎鮫島 央

◎ 世話人 ○ 副世話人

担当 指導部高等学校教育指導課指導主事 原田 能成

平成 22 年度
教育研究員研究報告書
高等学校 数学部会

東京都教育委員会印刷物登録

〔平成 23 年度第 46 号〕

平成 23 年 6 月

編集・発行 東京都教育庁指導部指導企画課
所在地 東京都新宿区西新宿二丁目 8 番 1 号
電話番号 (03) 5320-6836
印刷会社 有限会社 シーダー企画
住 所 東京都新宿区西五軒町 7-10
電話番号 (03) 5228-3451