

研究主題「中高一貫教育における証明指導の研究～充実期における論理の指導～」

東京都教職員研修センター研修部経営研修課

東京都立日本橋高等学校 教諭 神田 明子

研究のねらい

今年度の共同研究「中高一貫教育校における教養教育に関する研究」では、中学校・高等学校の6年間で2年ずつ生徒の発達段階に応じて3つの区分に分けた教養教育の在り方が提案され、そのうち3、4年を充実期としている。

充実期は中学校から高等学校への移行期にあたる。数学の証明指導では、演繹による推論の中で筋道の理解を中心に学習する中学校に対して、高等学校では、正しいことを立証するための厳密さが重視されるようになる。このことは、生徒にとって「高校になって急に数学が難しくなった」と感じる要因の一つになっていると考えられるが、継続的な指導が可能な中高一貫教育の中では、指導の工夫により自然な接続ができるのではないかと考えた。

高等学校において、証明を通して論理的に粘り強く考える力を育成するためには、中学校から高等学校への移行期となる充実期において、論理の学習を通して「証明の意義（何のために証明をするのか）」を十分に理解させ、「証明に対する学ぶ意欲や態度」を育成することが大切である。そこでそのための具体的な方策を明らかにすることを研究のねらいとした。

研究の内容と方法

基礎研究	調査研究	実践授業
論理の扱いについて明確にする。	都立高等学校第2学年(2校310名)対象 「数学及び証明に対する意識調査」	区立中学校第3学年 選択教科「数学」 「 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明する」

研究の結果と考察

1 基礎研究

学習指導要領等における論理の扱いを明確にするため、基礎研究を行った。

平成11年度改訂の高等学校学習指導要領では、数学の教科目標に「数学的活動を通して」という文言が加わった。数学的活動とは、身近な事象を数学化し、数学的考察・処理を行うことによって、活用・意味付けを行うこととされている。この「数学的考察・処理」という思考活動の意味の正確な理解を図ることが論理の指導の目的であると考えた。また、高等学校では評価の観点（関心・意欲・態度）の項目の中で「数学的活動を通して、数学の論理や体系に関心をもつ」とされており、「数学的な事象に関心をもつ」とされる中学校と異なり、論理の重要性が示されていると考えられる。

2 調査研究

高校生の論理の定着の様子と証明に対する意識を調べるため、調査研究を行った。調査対象としては都立中高一貫教育校の母体校となる高等学校第2学年の生徒310名とした。その結果を示したものが表1(P.42)であり、調査項目間で相関係数を求めたものが表2(P.42)である。その結果「証明が好き」については「高校で(数学が)得意」とは0.23の値が得られたが、「中学で(数学が)得意」とは0.18でほとんど相関がなかった。また、「高校で得意」と「背理法の理解」との相関係数は0.26であった。

以上の結果より、高校での数学の得意・不得意と証明への興味や背理法の理解をはじめと

する論理とは関係があることが分かった。しかし、現状ではその論理があまり定着しておらず、このことが高校で数学が苦手になる要因の一つになっているのではないかと考えた。

現在(高等学校2年2学期)の数学	得意4% どちらかという得意20%
中学校時代の数学	得意29% どちらかという得意25%
パズルや数学の懸賞問題	興味がある18% どちらかという興味がある37%
証明問題	興味がある4% どちらかという興味がある10%
証明の意義を正確に理解している	44%
背理法について記憶に残っている	29%

高校で得意	1					
中学で得意	0.49	1				
パズル・懸賞問題が好き	0.17	0.26	1			
証明が好き	0.23	0.18	0.26	1		
証明の意義の理解	0.15	0.18	0.05	0.19	1	
背理法の理解	0.26	0.09	0.18	0.17	0.21	1

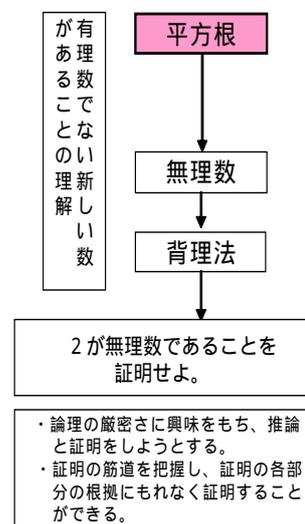
3 実践授業

調査研究によると「証明の意義の理解」と「背理法の理解」との相関係数は0.21であり、背理法の理解が証明の意義を理解することにつながるのではないかと考えた。

背理法については高等学校「数学A」の「集合と論理」の単元の中で扱われる。しかし、調査研究の背理法が高校生にあまり定着していない現状から考えて、背理法はこの単元の中だけで定着を図ることは難しく、充実期の中で段階的な指導をしていくことが望ましいと考えた。

中学校学習指導要領解説によると、選択教科「発展的な学習」の学習内容の例として、背理法を用いて証明する代表的な問題である「2が無理数であることの証明を知ること」が挙げられている。これを図1のように平方根の発展的な学習として取り入れることが、背理法の段階的な指導の一つにあたるのではないかと考えた。

図1 平方根の発展学習



そこで、その指導にあたり学習過程及び指導法を工夫し、公立中学校3年生を対象に実践授業を行った。

(1) 学習過程の工夫

高等学校で「2が無理数であることの証明」を授業で扱う際、背理法の考え方を他の問題に応用させる力の育成に十分な時間をとる必要がある。そのため、例えば下の表のように、いきなり証明問題の解説をし、「2が無理数であることの証明」の内容については、証明の筋道を理解することや証明の中の一つ一つの論理を厳密に理解することについて、解説を聞くだけで定着するという前提で指導することが多い。

指導のねらい	指導方法
証明の筋道を理解する。	問題の解説を行う。
証明の内容を厳密に理解する。	演習や確認テストを行う。
自分で表現する。	類題の演習を行う。
応用する力を身に付ける。	

今回は学習過程を考えるにあたり、2単位時間の中で次の2つの工夫を行った。

導入に十分な時間をかけ、まず証明への意欲を喚起した。数学史と関連付けてこの証明を

扱うこととし、ピタゴラス学派による無理数の発見の話を通して、この証明は歴史的に非常に意味があることを説明した。そして「興味のある人は考えたり調べたりしてみましょう。」と声をかけ、調べ学習を促した。

また、「文字を用いることの意義」「証明の筋道を理解する」という既習事項の確認をねらいとし、文字式による証明の復習も行った。

解説の際には証明の筋道を理解することに専念できるよう、解説後にじっくり考えるための時間をとった。高等学校では、解説で理解できなかった場合については、理解してくることを家庭学習とすることが多いが、今回は論理の導入という位置付けからも授業時間内に設定し、きめ細かく指導を行うこととした。

単位時間	指導のねらい	指導方法
1	証明への意欲を喚起する。	数学史と関連付けて説明する。
	自ら学ぶ姿勢を育成する。	調べ学習を促す。
	既習事項を確認する。	文字式の証明の復習をする。
2	証明の筋道を理解する。	問題の解説を行う。
	証明の内容を厳密に理解する。	個別学習（机間指導を行う。）
	自分で表現する。	確認テストを行う。

(2) 指導法の工夫

証明の内容を厳密に理解する際に、学び方を身に付けるための手だてとして「スクラッチカード」（宝くじなどで使われる銀色部分をコインなどで削って中を見るカード）を活用した。自分の理解に合わせて必要な部分だけを削るため、証明全体の中で自分が理解できていないのはどこであるかを確認することができる。分からないときは、まずどこが分からないのかを見つけ出し、自分の課題を明確にすることが必要である。さらに論理の学習においては、証明の中に並ぶ命題の1つ1つが確かに正しいかを、丁寧に確認することが必要であるということ、体験を通して理解させることをねらいとした。

また、全員に同じカードが同時に配布されるため、自分が必要な時に、必要な所をヒントとして得ることができ、周りとの理解の早さの差を意識することなく学習に取り組むことができる。できないことを仲間知られることが恥ずかしいという気持ちを感じずに気軽に活用でき、考えることに集中できると考えた。

(3) 結果と考察

振り返りの時間をとることは高等学校の授業でもあるが、「自分には理解できない。」と諦めてしまい、途中で考えることをやめてしまう生徒が多い。しかし、今回の実践授業では、ほとんどの生徒が時間いっぱい考えていた。また机間指導においても、カードの活用の様子などから生徒の思考の過程を容易に見取ることができ、適切な助言をすることができた。その結果、最後の確認テストでは、「2が無理数であることの証明」に対して6名中4名が正解、残りの2名も1～2カ所の矛盾はあったが、筋道は十分理解できていた。

授業後に事後アンケートを行った。実践授業と事後アンケートを基に、理解と興味・関心の2つの視点で分析を行った。理解については「証明の意義が正確に理解できているか」を観点とし、「スクラッチカードを活用しての解答と確認テストの結果」、事後アンケートの回答の「文字式の意義の理解」「証明の意義の理解」の3項目を、興味・関心については「証明に対する学ぶ意欲や態度が育成されたか」を観点とし、すべて事後アンケートの回答から

「授業の感想」「背理法への興味」「証明への興味」の3項目を1～3点で数値化し、それぞれ合計9点満点とした。AからFまでの6名の生徒について集計した結果が表3である。

表3 集計結果

	理解	興味・関心
生徒A	8	7
生徒B	8	8
生徒C	5	9
生徒D	9	8
生徒E	9	6
生徒F	7	6

理解および興味・関心ともに高得点を示した生徒A、生徒B、生徒Dについては、十分な成果があったと考えられる。特に生徒Dについては、自由課題に取り組んでいた（事前にインターネットで調べてあった）こともあり、理解が深まり、証明の意義についても最も的確に答えていた。

生徒Cについては、文字式の扱いが不慣れだったことが理解の得点が低かった原因と考えられるが、興味・関心については9点で最高値を示した。生徒E、生徒Fについては、今後も指導の工夫により、興味・関心を高めていくことが必要であると思われるが、理解については深まった。以上の結果より生徒一人一人の変容がとらえられ、指導の成果が実証的に検証された。

学び方を身につけるための手だてとして活用した「スクラッチカード」については、生徒の感想より「自分のペースで落ち着いて考えることができるのでよい」が6名中4名、「自分で勉強しているという感じがする」が2名であった。

4 研究のまとめ

論理は短時間での習熟が難しく、高等学校の数学教育において定着が難しい現状にある。しかし、数学史と関連付けるなどの導入の工夫により学習意欲を高め、指導の後に振り返りの時間をとり課題意識をもって論理の学習に取り組むことで、中学生でも背理法への理解を示し、自ら学ぶ充実感を体験させることで、「証明の意義」の理解や「証明に対する学ぶ意欲や態度」の育成にもつながることが分かった。

今回は授業時間内での指導の工夫について実践を行ったが、この授業だけで背理法が定着するわけではない。背理法の定着に当たっては、例えば表4に示したように充実期の中で段階的に指導していくことが必要であると考えられる。

表4 背理法の段階的な指導の例

指導学年	位置付け	指導目標
3年	「平方根」の発展的な学習	背理法の考え方を知る。
		論理の学習を体験する。
4年	「集合と論理」の学習のまとめ	集合の概念から背理法の考え方を厳密にとらえる。
		対偶による証明なども加え、途中の論理をより厳密に論じる。
		「背理法」の考えを他の問題に応用させる力を育成する。

さらに、中学校、高等学校の6年間を継続して指導する中高一貫教育における証明指導では、教育課程の基準の特例等を生かし、このような論理の指導に積極的に取り組むことが可能であると考えられる。

今後の課題

今回の実践授業は公立中学校における選択授業の中で行ったが、今後開設される都立中高一貫教育校の中で、生徒数20～40名の授業での成果を検証していくことが今後の課題である。また、段階的な指導により充実期における「証明の意義」の理解や「証明に対する学ぶ意欲や態度」が定着することを長期的な視点で検証し、高等学校において証明を通して論理的に粘り強く考える力を育成する具体的な方策へとつないでいきたい。