

研究主題 「直観力・論理的な思考力を育成する指導の研究

～ 中高一貫教育の特性を生かした図形の学習活動を通して～

東京都教職員研修センター研究部研究課
都立大学附属高等学校 主幹 杉本 悦郎

研究のねらい

中学校及び高等学校の学習指導要領数学の目標に、事象を数理的・数学的に考察し処理する能力を高めていくことが示されている。その中でも見通しをもって論理的に考察し表現する能力の育成は図形領域において特に重視されている。また、直観的な見方や考え方、論理的な見方や考え方は、図形領域に限らず様々な分野の学習において重要な役割を果たすものである。

これらのことから、数学的な見方や考え方を深め、直観力・論理的な思考力の育成をねらいとした指導の充実を図る必要があると考えた。また、演繹的な推論を活用することが図形領域の特徴であり、演繹的な推論によって、図形概念や性質が体系的に整理されることから、中高一貫教育校において継続的に指導を行うことで、一層の効果が期待できると考えた。

そこで、中高一貫教育の特性を生かし、図形の学習活動を通して、直観力・論理的な思考力を育成するための効果的な指導を明らかにすることを研究のねらいとした。

研究の内容と方法

【基礎研究】

- 1 文献研究等
- (1) 直観力・論理的な思考力についての分析と考察
文献・先行研究など
- (2) 算数・数学の学習内容の系統の分析等
学習指導要領及び解説、教科書など
- (3) 国の答申、東京都の報告書などの分析等
中央教育審議会答申、学校教育法施行規則など
東京都教育委員会報告書など

【実践研究】

- 1 カリキュラム開発
- (1) 中高一貫教育校の6年間の指導計画の作成
- 2 指導の工夫
- (2) 直観力・論理的な思考力を育成する指導
- 3 授業実践
- (3) 学習指導案の作成
- (4) 検証授業の実施・考察
(高等学校第1学年数学A「三角形の性質」)



研究の結果と考察

1 基礎研究

(1) 直観力・論理的な思考力についての分析と考察

「直観」には三つの意味が含まれている。一つには、すばやく、直接的に対象をとらえる方法を意味する「直観的」、二つには、例えば図形を頭の中に思い浮かべ、それを念頭で操作し、その結果を想像した姿を表す「直観像」、三つには、全体の構造を把握し、問題の本質を見抜く力を意味する「直観力」である。本研究では、これらの中から特に論理的な思考力と関連の深い「直観力」に着目し、その定義を「結果や方法を見通す力」とした。そして、問題解決の過程で活用する「直観力」を、問題の内容を理解する段階における「結果を見通す力」と、問題解決の計画を立てる段階における「方法を見通す力」の二つととらえた。

一方、「論理的な思考力」とは、帰納、類推、演繹などの数学的な推論によって「筋道を立てて考えたり説明したりする力」を表している。

直観は結果や方法を見通し、論理を導く働きをすると同時に、論理によって確かめられたものであり、論理が直観による見通しを確かめる働きをすることから、直観と論理は相互補完的な関係にあるといる。

(2) 直観力・論理的な思考力を育成する学習過程の工夫

先行研究の分析を通して、直観力の「結果を見通す力」を育てるためには、念頭操作などを行う必要があることや、「方法を見通す力」を育てるためには、論理的な思考の積み重ねが不可欠であることなどが分かった。また、直観は学習活動の中で確かな根拠を基に論理的に考察することによって高められ、論理は直観に基づいて展開され、図形の性質を関連付け体系化する役目を果たしていることから、直観と論理を相互に高めていくことが必要であることが分かった。そこで、図形についての学習を通して、直観力・論理的な思考力を育成するための学習過程の工夫を以下の3点にまとめた。

- () 性質を見いだす学習活動
観察、操作や実験の過程において、帰納や類推などの数学的な推論を活用し、図形の関係や性質を予想、発見する。このような活動を取り入れることによって、「問題の構造を把握し、結果を見通す力」を育成する。
- () 多様な見方や考え方を引き出す学習活動
「論理的な思考力」を育てるためには、多様な解決が可能な課題を設定することが有効である。形や大きさ、位置関係など様々な観点から図形を考察し、自力解決による自分の考えをもち、それを表現することによって、図形に対する見方や考え方を深めることができる。
- () 多様な解法を比較・検討する学習活動
解法の共通点や相互の関係に着目して、分類・整理する活動や、簡潔性・明瞭性や発展性などの視点から有効性を検討する活動を通して、「方法を見通す力」を育成する。

(3) 算数・数学の学習内容の系統の分析等

学習内容の系統を小学校、中学校及び高等学校の学習指導要領やその解説、教科書などから分析・整理を行った。その結果、各学校種における内容の取扱いや指導内容の関連などが明らかになった。

一方、平成16年4月の学校教育法施行規則の一部改正により、中高一貫教育にかかわる教育課程の基準の特例が拡充され、中高一貫教育校では中学校及び高等学校の指導内容の一部について、相互に関連する内容を移行・統合して指導することなどが可能となった。

2 実践研究

(1) 中高一貫教育校の6年間の指導計画

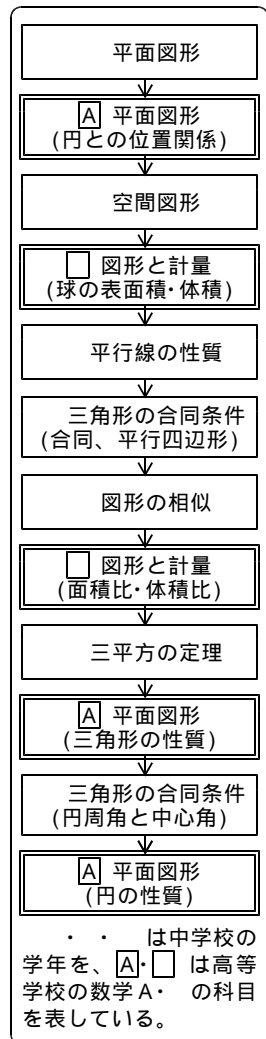
中高一貫教育校では学習内容の系統性を重視した6年間の継続的な指導計画を作成することができる。本研究では、系統を代数と幾何の二つに分け、指導計画を作成した。また、例えば中学校第2学年の「円周角」と数学Aの「円の性質」など関連のある学習内容を教育課程の基準の特例を活用し、移行・統合することによって、学習効果を一層発揮することができる。図1は幾何の系統の学習内容を表している。

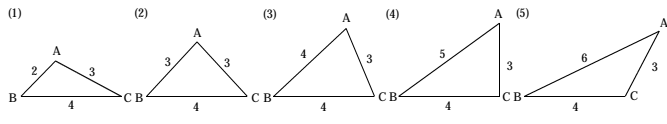
(2) 授業実践計画の作成と指導の工夫

本単元では、三角形の構成要素に着目して、辺の長さや角の大きさとの関係や三角形の成立条件などの図形の性質を見いだす学習活動を取り入れた。次に、角の二等分線と線分の比の関係を見いだし、多様な証明を行う学習課題を設定した。ここでは、結果を予想しそれを証明する自力解決の時間を十分に確保した。また、自分の考えをもち、

それを表現する活動により、論理的な思考力を育てるとともに、それぞれの見方や考え方を共有することで、方法を見通す力を育てるようにした。さらに、共通点や相違点などに着目し、多様な解法を分類・整理する活動などによって、それらの力を一層伸ばすようにした。

図1 幾何の系統



学習内容	指導の工夫
<p>[三角形の性質を見いだす学習活動] 三角形の構成要素（辺や角）や面積に着目し、二つの辺や角の大きさを比較することや(1)から(5)の三角形の辺の長さや角の大きさなどの変化を調べることによって、三角形に関する性質を発見していく。 「ABCの頂角Aの二等分線を引いたとき、交点Dは辺BCをどのように分けるか」を予測する（BD：DCを求める）。</p> 	<p>教材開発の工夫 一定条件で変化する五つの三角形の観察、操作などを通して図形の性質を見いだしていく学習活動を取り入れた。 具体的な指導の工夫 (1)から(5)の三角形を拡大した図形を用意し、具体的な操作が可能となるようにした。また、生徒は必要に応じて、ワークシートにかかれた図形の長さや角度を定規や分度器を用いて測って調べることができるようにした。 問題の把握が十分に図れるように、五つの図形の変化の様子が分かる教具を用いた。</p>
<p>[内角の二等分線と線分の比の関係の証明とその比較・検討] 「ABCにおいて、Aの二等分線と対辺BCとの交点をDとすると、DはBCをAB：ACの比に内分する」ことを証明する。 一つの解法にとどまらず、位置関係や辺の長さなどの様々な観点で、図形を考察することによって、複数の証明方法を考える。 生徒から出された多様な解法等（出されなかった解法については簡単に紹介をする）について、補助線を引いた根拠や証明に用いられた図形の性質などの視点で、解法を分類・整理する。</p>	<p>教材開発の工夫 様々な観点による補助線の引き方によって、多様な解法が引き出せる問題を取り上げた。また、多様な見方や考え方ができるように補助線のないワークシートを用意した。 授業展開の工夫 生徒が考えた解法を自ら黒板にかき、その根拠や手順を発表する。発表の際に、厳密な証明の表現よりも、結論に至る推論の過程を筋道立てて説明するように留意した。 学習過程の工夫 課題解決に際しては自力解決の時間を十分とり、多様な考えを引き出していく。また、学習の振り返り活動の時間を確保し、生徒の多様な解法を比較・検討する活動を行う。</p>

(3) 検証授業の結果と考察

[性質を見いだす学習活動]

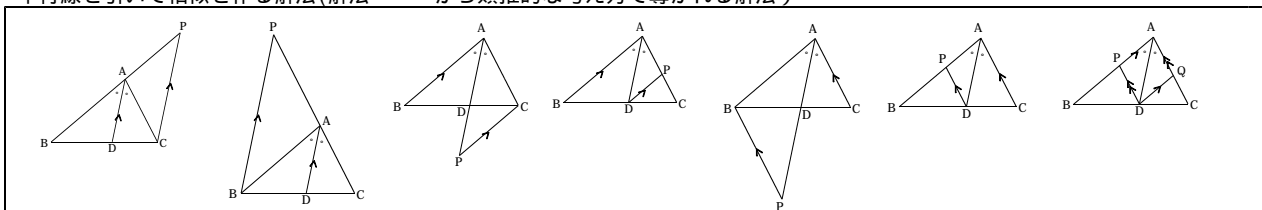
三角形の観察、操作の過程において、帰納や類推などの推論を活用し、「三角形の辺の大小と対角の大小の関係」や「三角形の三辺の長さの関係」などの性質を見いだすことができた。また、具体的な操作などによって、「内角の二等分線と線分の比の関係」について予想を行ったが、問題の構造を把握できず、証明方法を見通せない生徒の様子が見られた。

[多様な見方や考え方を引き出す学習活動]

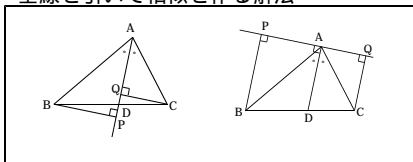
内角の二等分線と線分の比の関係の証明では、定理を証明するには「平行線と線分の比」や「図形の相似」の性質を活用するという考えから、「平行線を引く」「相似な三角形を作る」という見通しが出され、平行線を利用する補助線の解法（図2参照、以下同様）が出された。また、63%の生徒はそれらから類推される解法～を導いた。それ以外の解法を考えた生徒は少数であった（垂線を利用（8%）、面積を利用（18%）など）。

図2 生徒から出された解法と授業で紹介した解法

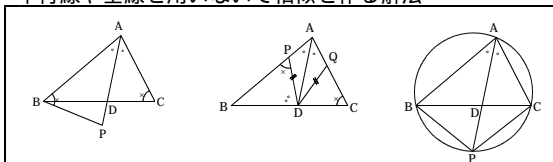
平行線を引いて相似を作る解法(解法～から類推的な考え方で導かれる解法)



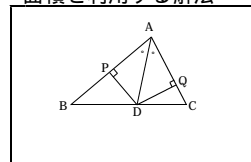
垂線を引いて相似を作る解法



平行線や垂線を用いなくて相似を作る解法



面積を利用する解法



[多様な解法を比較・検討する学習活動]

平行線や垂線を用いない相似の解法～を考えた生徒がいなかった点に着目すると、「方法を見通す力」を伸ばすためには次ページのような、指導計画の工夫が必要と考えられる。

適用問題における解答を分析したところ「外角の二等分線と線分の比の関係」を見だし、証明を正しく行うことができた生徒が全体の63%（提出者の76%）という結果であった。正解

率などから、結果を見通し、問題を解決する力が向上したと考えられる。一方、正解者で複数の解法を示した生徒が全体の30% (平均1.7個)ということから、多様な見方や考え方を深めるには、本時のような学習経験を積み重ねていくことが不可欠であると考えられる。

3 研究のまとめ

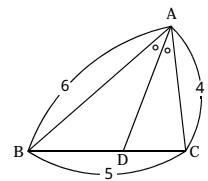
(1) 直観力・論理的な思考力を育成する指導の改善

検証授業などの考察から、直観力を伸ばすためには直観的な扱いに終始せずに、具体的操作から念頭操作へと発展させていくことが必要であり、教材開発や授業展開などの工夫が重要であることが分かった。そこで、指導の効果を高めるために、次のような改善を考えた。

三角形の性質を見いだす学習活動の改善例

図3のABCにおいて、「BDの長さを求める」という課題を与えると、生徒は具体的に長さを測る、補助線を引くなど様々な取組みを行う。これらの活動により結果の予想にとどまらず、証明の見通しを立てることが可能となる。そこで、この課題の後に「内角の二等分線と線分の比の関係」を見いだす活動等へと授業を展開することがより効果的であると考えられる。

図3



指導計画の工夫 (相似な図形の性質や三角形の相似条件を学習後に設定)

中高一貫教育校ではその特性を生かし、意図的・計画的に学習課題を設定することで、その効果が一層期待できる。そこで、相似になる条件を的確に選択し、相似な三角形を容易に見つけることができるようになることをねらいとして、次のような課題を設定する。

学習内容	指導の工夫
<p>[相似な図形を作成する学習活動]</p> <p>「ABCの中に適当な線分を1本引くことによって、ABCと相似な図形を作成する。」という問題に取り組む。</p> <p>作成された三角形の線分を引いた位置関係やその根拠となる観点などにより、分類・整理していく。このとき、各自の考えを発表するとともに、それ以外の線分の引き方があるのかを検討していく。</p> <p>線分を引いた観点や三角形の相似条件などから、解法を統合し、解法の序列化、構造化などを図っていく。</p>	<p>教材開発の工夫</p> <p>角度の大きさや辺の長さなど、いろいろな観点を基に、多様な線分の引き方が可能な問題を取り上げた。</p> <p>授業展開の工夫</p> <p>分度器、定規、コンパスなどを使用して、線分を引く。その際、作図に利用した角度や長さを記入する。</p> <p>生徒が各自の解法を発表する際に、結論に至る推論の過程を筋道立てて説明するように留意する。</p> <p>学習過程の工夫</p> <p>学習の振り返り活動の時間を十分に確保し、生徒の多様な解法を比較・検討する活動を行う。</p>

図4 予想される生徒の解法と分類・整理、分析などの例

利用した角度や辺の長さ等の観点	DE // BC (ABC = ADE) (ACB = AED)	ACB = ADE (ABC = AED)	AB : AD = AC : AE	AB : AE = AC : AD	
観点に基づいて引いた線分の図					
分類・整理	対応する2組の角が等しい		対応する2組の辺の比とその間の角が等しい		

(2) 直観力・論理的な思考力を育成する効果的な指導

以上のことから、学習過程などの指導の工夫が直観力・論理的な思考力の育成に効果的であると考えられる。しかし、これらの力は短期間で培われるものではなく、系統的な学習活動の積み重ねが不可欠である。また、演繹的な類推の理解を深めていくことが、代数的な諸関係への直観も高めていくことから、他の領域でもこれらの指導が有効であると考えられる。

今後の課題

今後の課題は、中高一貫教育校において、研究の成果を検証し、改善を重ねることである。また、他の内容での教材を開発するとともに、生徒の実態に応じた手だてを考えていきたい。