

研究主題「演繹的な推論の過程を的確に表現する能力を伸ばすための授業改善 —図形による論証指導を通して—」

東京都教職員研修センター研修部専門教育向上課
世田谷区立喜多見中学校 主幹 渡辺好造

I 研究のねらい

中学校学習指導要領解説（数学編）においては、「図形の領域では、自ら課題を見だし、解決するために、根拠を明らかにし、筋道を立てて説明する表現力や論理的な思考力の育成を重視して、図形の証明に関する内容に重点を置く」「中学校数学の大きな特徴は、演繹的な推論の方法を活用することにある」と示されている。

小学校では、図形の性質について、作業的・体験的な活動など算数的活動を通して調べてきている。中学校第2学年では、それらの性質を、論理的に筋道を立てて正しい推論を行って調べることができるようにするとともに、その推論の過程を正しく表現できるようにすることがねらいである。

「平成15年度 小・中学校教育課程実施状況調査」（国立教育政策研究所）では、第1学年の作図の問題、第2学年の平行線に補助線を引く問題や角の大きさを求める問題など基礎的・基本的な問題の正答率が高い。しかし、第2学年、第3学年の証明にかかわる問題など、自分の考えを記述する問題の正答率が低くなり、無解答のものも多くなると報告されていることが分かった。

図形による論証指導の際にも、生徒はその証明の全体の見通しが立たないために混乱してしまう場面や、指導者が一方的に板書し、説明する授業になりがちな場面が見られる。

こうした状況を改善するために、以下の2点が重要であると考え、本主題を設定した。

- 1 生徒が証明の全体像をつかみ、演繹的な推論ができる授業
- 2 演繹的な推論の過程を的確に表現する能力を伸ばす授業

II 研究の内容と方法

【仮説】 生徒が証明の全体像をつかみ、筋道を立てて考える授業へと改善すれば、演繹的な推論の過程を的確に表現できるようになる。

基礎研究

- (1) 各種調査結果を基に、図形領域の指導の課題の明確化
- (2) 学習指導要領解説などを基に、図形による論証指導上の視点の明確化

実践研究

- 第2学年「合同な図形」単元の指導計画（表2）に従い、検証授業を行った。研究主題に迫るための授業改善の方策は以下の5点とした。
- (1) 正確に作図することの徹底
 - (2) 証明の方法を明確にするワークシートの活用
 - (3) 生徒が主体的に課題に取り組む授業展開
 - (4) 筋道を立てて表現する能力を育成する授業のまとめ
 - (5) 推論の過程を的確に記述することを目指した課題への取り組み

補助資料

- 第7時に用いたもの
- (1) 学習指導略案
【補助資料①】
 - (2) 生徒用ワークシート
【補助資料②】
 - (3) 作図と証明の練習
【補助資料③】
 - (4) 今日の課題
【補助資料④】

III 研究の考察と結果

1 基礎研究

(1) 図形領域の指導の課題

「平成15・16年度 児童・生徒の学力向上を図るための調査報告書」（東京都教育委員会）では、図形領域全体の正答率と証明にかかわる問題の正答率の差が明らかになり（表1）、指導の

改善のポイントとして以下のような点が求められた。(表1)児童・生徒の学力向上を図るための調査

- 1 数学的な推論の意義とその理解を深める指導の充実
 - 2 推論の根拠として用いることのできる図形の性質を整理し、他の図形の性質を論理的に確かめることができるようにする指導の工夫
- また、「平成15年度 小・中学校教育課程実施状況調査」(国立教育政策研究所)において、推論の過程を的確に表現する能力の育成が指導上の改善点として挙げられた。

	平成15年度	平成16年度
図形領域の正答率(%)	74.4	60.2
図形に関する見方や考え方	54.9	36.6
	二等辺三角形の性質などを用いて、条件を満たす適切な合同条件を考察する問題	二つの合同な三角形を見だし、それらが合同になるための条件を考察する問題

(2) 図形による論証指導上の視点

① 証明の位置付けと意義

数学的な推論には、帰納的推論、類推的推論、演繹的推論があり、帰納的推論や類推的推論によって得られた性質や関係に対して、その一般性を保証する推論が演繹的推論である。

数学における証明は、この演繹的推論の過程を、記号や論理式によって記述したものと位置付けられ、演繹的推論によって図形の性質を証明していく学習が第2学年から始められるのである。

数学的な推論によって考察する過程を通して養われる論理的な見方や考え方は、他の分野の学習や日常生活においても幅広く活用することができる。

② 論証指導で育成する能力

論証指導を通して、「仮定」から「結論」までの過程を的確に、しかも簡潔で分かりやすく表現できるようにする能力を育成することが指導の大切なねらいである。

その推論の過程を、まず筋道を立てて説明できるようにして、次第に形式に慣れさせ、最終的に整った形式で数学的に表現できるように指導計画を立てる。

2 実践研究

基礎研究を踏まえ、演繹的な推論の過程を的確に表現する能力を伸ばすための授業改善の方策をたてた。その有効性を確認するため、第2学年「合同な図形」の検証授業を行った。

(1) 正確に作図することの徹底

正確に作図することは、図形の学習のための基礎的な技能として重要であるとともに、図形に対する興味や関心をひき起こし、直観的な見方や考え方を深め、図形についての論理的な考

(表2)実践研究「合同な図形」単元の指導計画

項	時	ねらい	作図と証明の練習	発展的な課題	アンケート
図形	1	・合同の意味を理解する。 ・合同な図形の性質を理解し、それを式に表すことができる。 ・合同な2つの図形を、記号を使って表すことができる。 【ワークシート】「合同な図形」			
三角形の合同条件	2	・合同な三角形の書き方の考察を通して、三角形の合同条件を理解する。 ・三角形の合同を、合同条件から判断することができる。 【ワークシート】「三角形の合同条件」			
	3	・三角形の合同条件を使って合同な三角形を見だしたり、記号を使って表したりすることができる。 【ワークシート】「合同条件の使い方1」	第1回		
	4	・作図の確かめなど、簡単な図形の性質を三角形の合同条件を用いて証明することができる。 【ワークシート】「合同条件の使い方2」	第2回		
証明の進め方	5	・三角形の合同条件を用い、図形の性質を考察することができる。 【ワークシート】「合同条件の使い方3」	第3回		第1回
	6	・仮定、結論の意味を理解し、簡単な命題についてその仮定と結論を区別することができる。 ・証明の進め方を理解し、証明の根拠となる事柄を明らかにしながら証明を行おうとする。 【ワークシート】「証明の進め方1」	第4回		第1回
	7	・三角形の合同条件などを利用して、簡単な図形の性質を証明することができる。 ・図形の基本性質を基に、図形の性質を考察することができる。 【ワークシート】「証明の進め方2」	第5回		第2回
	8	・定理の意味を理解するとともに、証明の根拠となる図形の基本性質や、これまで学習してきた定理について理解する。 【ワークシート】「証明の進め方3」	第6回		第2回

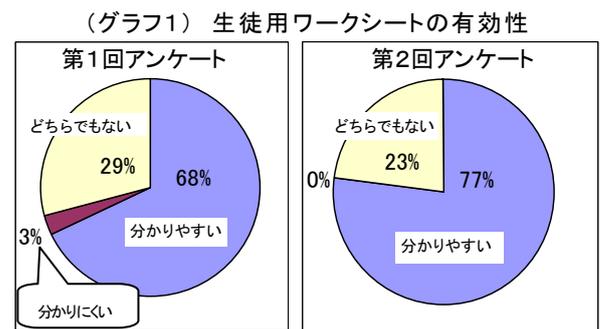
察を促すという意義をもつ。

指導者はコンパス・定規などの教具を用いて正確に作図し、生徒に模範を示し、生徒にも正確に作図するように指導を徹底する。その結果、生徒は正確に作図する習慣を身に付け、その作図が条件に適するかを考察する能力や態度の育成につながると考える。

(2) 証明の方法を明確にするワークシートの活用

証明の方法と全体像を明確にし、演繹的な推論を立てやすくするためにワークシート（補助資料②）を活用する。このワークシートは、まず命題の「仮定」と「結論」をはっきりさせる。そして、「仮定」から出発して、既に正しいと認められている事柄を根拠にして、「結論」を導けるよう構成する。ワークシートを活用し、課題に取り組む際は、生徒が課題に対し見通しをもち、自力解決することを目標とする。

第1回と第2回のアンケート調査（実施時期は、表2「指導計画」参照）において、ワークシートを活用することによって証明の方法が理解できたかを質問したところ、「分かりやすい」と回答した生徒が増加し、「分かりにくい」「どちらでもない」と回答した生徒が減少している。学習内容が進むにつれて、ワークシートの有効性が大きくなっていることを示している。（グラフ1）



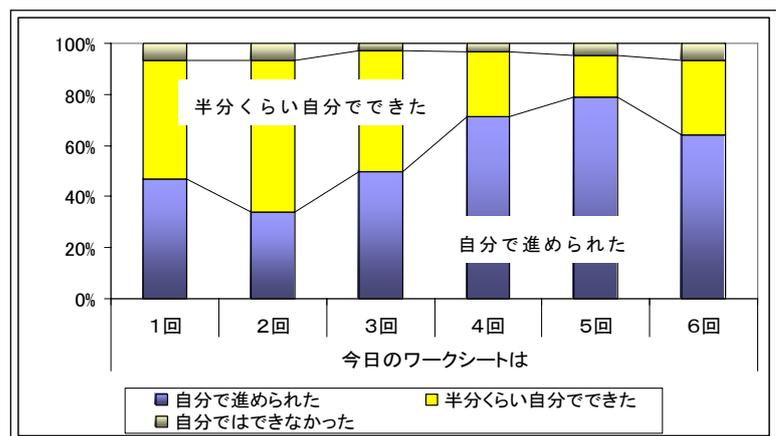
(3) 生徒が主体的に課題に取り組む授業展開

図形による論証指導の授業では、指導者が一方的に板書し、説明する授業となりがちなので、生徒が主体的に課題に取り組む授業となるよう、生徒がお互いの発表を聞き、考えの共通点や相違点に気付き、学び合う授業展開とする。

第2学年の図形による論証指導の目標は、推論の過程を表現できることなので、生徒が自分で記述した表現を大切にしながら、課題を自力解決していくことで、その目標を十分に達成していくと考える。

第3時から第8時まで（計6回）の自己評価の結果からは、「自分で進められた」と評価している生徒が増加傾向にあることが分かり、証明の

(グラフ2) 生徒用ワークシートを自分で進められた生徒の割合



全体像をつかみ、見通しをもつことにより、課題に主体的に取り組む、学習が定着していく様子を読み取ることができる。（グラフ2）

(4) 筋道を立てて表現する能力を育成する課題への取り組み

授業のまとめとして、授業で扱った課題の中から一題を「作図」「仮定」「結論」「証明」に分けて再現することを目標とした「作図と証明の練習」（補助資料③）を行う。

「作図と証明の練習」に取り組む際は、ワークシートなどを見ずに、自分で「作図」「仮定」「結論」「証明」を書くように指導する。途中で分からなくなった場合には、ワークシートなど

を手掛かりに、「証明」を再現していくように助言する。第3時から第8時まで（計6回）の自己評価の結果からは、課題の難易度を考慮に入れると、全体的には「見ないでできた」と評価している生徒が増加傾向にあるということが出来る。（グラフ3）

(5) 推論の過程を的確に記述することを目指した課題への取り組み

「仮定」「結論」「証明」のすべての

記述を目指して「今日の課題」(補助資料④)に取り組む。推論の過程を的確に記述することは、第3学年の目標なので、第2学年では、見通しをもち、筋道を立てて正しく表現しようとすることに指導の重点を置く。その学習活動自体が推論の能力を高めていくと考える。そのような推論の能力を育成するためには、始めから、数学的な形式の整った証明の書き方を要求するのではなく、生徒なりの表現を尊重していき、次第に形式に慣れていくよう指導する。したがって、課題に対する目標も、「仮定と結論を区別して記述する」「合同となる三角形を見付け、証明を進めていく」「最後まで証明を記述する」などいくつかのレベルに分けて設定する。

検証授業では、第1回「平行線」、第2回「二等辺三角形」(補助資料④)、第3回「正方形」を「今日の課題」のテーマとした。二等辺三角形の性質と正方形の性質については、中学校の授業ではまだ学習していないので、小学校で学習した事項を利用するように指導した。答案を分析した結果から、到達のレベルが回を追うごとに上がっていることが分かる。（グラフ4）

3 検証授業の考察と結果

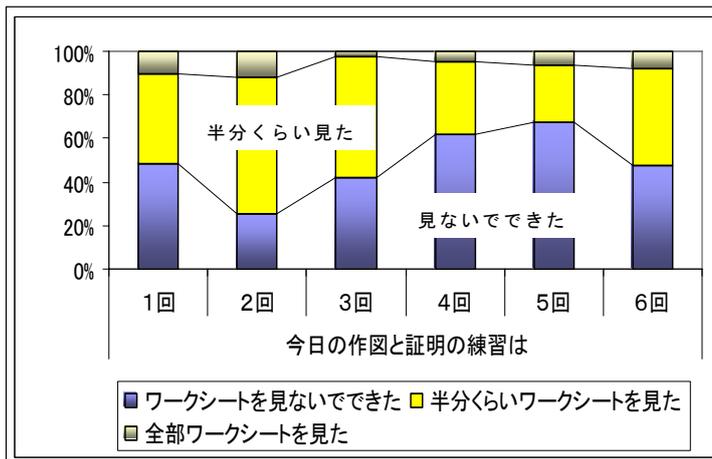
検証授業における生徒への質問結果から、(1)～(5)までの授業改善の方策を取り入れることにより、生徒は課題の全体像をつかみ、自力解決していこうとするようになったと言える。また、他の生徒の発言を聞き、自分の考えを見直す活動を繰り返すことで、筋道を立てて表現する能力を伸ばすことができたことと考察できる。その結果、「演繹的な推論の過程を的確に表現できるようになる」という仮説を検証できたことと考える。

このような授業を継続し、第3学年までの指導の中で、意図的・計画的に発展させていくことで、自ら課題を見だし、解決するために根拠を明らかにしながら筋道を立てて説明する表現力や論理的な思考力を育成できると考える。

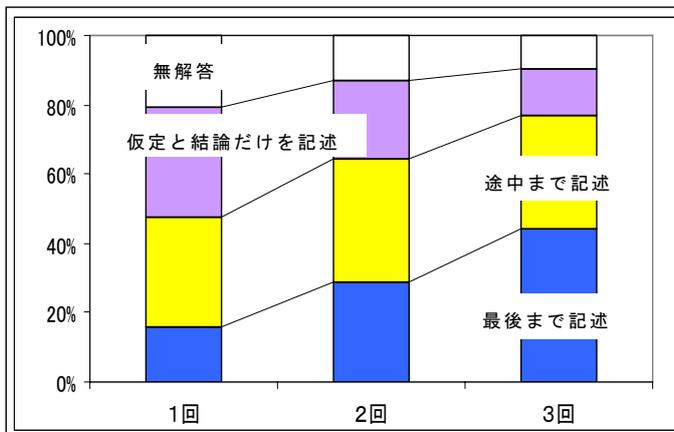
IV 今後の課題

数学的な推論の理解と論理的に表現する能力を伸ばす授業への改善を目指し、他の単元の教材の開発にも取り組み、その普及・啓発を図る。

(グラフ3)「作図と証明の練習」の記述ができた生徒の割合



(グラフ4)発展的な学習の課題が自力解決できた生徒の割合



「証明の進め方2」学習指導略案（7時間目／8時間）

- 本時の目標
- ・三角形の合同条件を利用して、簡単な図形の性質を証明することができる。
 - ・図形の基本性質を基に、図形の性質を考察することができる。

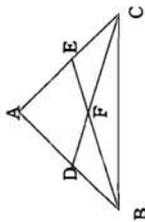
	学 習 活 動	◇指導上の留意点、☆支援、◎評価
導入 5分	<ul style="list-style-type: none"> ・三角形の合同条件について復習・確認をする。 	<ul style="list-style-type: none"> ◇三角形の合同条件を言葉だけでなく、図でも確認させるため、合同な三角形を提示する。 ☆合同条件が思い出せない生徒には、教科書を参照させる。
展開 25分	<ul style="list-style-type: none"> ・（基本の確認1）を読む。 ・問題文から「仮定」と「結論」を読み取り、発表する。 ・（基本の確認1）の流れに従い、「証明」を進める。 ・「証明」の解答を発表する。 ・（基本の問題2）を（基本の確認1）と同様に進めていく。 ・（基本の確認3）を（基本の確認2）と同様に進めていく。 	<p><u>ワークシート</u>を配布する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ◇記号を正しく読むように指導する。 ◇指導者はコンパス・定規を用いて作図し、正確な作図を生徒に徹底する。 ◇「（仮定）ならば（結論）」という部分を問題から見付け、すべて自分で書いていくよう指導する。 ◇ワークシートには、「証明」の全体が示してあるので、自力解決するように指導する。 ◇発表の際は、指導者は発言内容のすべてを板書せず、生徒がお互いに発表を聞き、考えの共通点や相違点に気付き、学び合う授業展開とする。 ◇生徒が自分で記入・表現した事柄を大切に、図の中には、等しいことを示すマークを記入する程度にする。
まとめ 10分 1	<ul style="list-style-type: none"> ・（基本の確認3）を「作図と証明の練習」に再現をする。 ・「作図」については、定規・コンパスを使う。 ・「仮定」「結論」は式で書く。 ・「証明」は文字などを省略せず、丁寧に書く。 ・自己評価をする。 	<ul style="list-style-type: none"> ◇二等辺三角形の性質に関連する（基本の確認3）を全員に取り組みさせる。 ◇生徒の理解度に応じて課題のレベルを設定する。 ☆よく理解できた生徒には、板書の作図から自分一人で「仮定」「結論」「証明」を書くように指導する。 ☆途中で分からなくなってきた場合には、ワークシートを手掛かりに、証明を再現していくよう助言する。 ◎推論の過程を的確に表現することができる。 <p style="text-align: right;">【表現・処理】</p>
まとめ 10分 2	<ul style="list-style-type: none"> ・「今日の課題」に取り組む。 	<ul style="list-style-type: none"> ◇二等辺三角形の性質は小学校の既習事項を使う。 ◇「仮定として示されていることを作図の中に書き入れる」「問題文より、仮定と結論を区別して記述する」「合同となる三角形を見付け、証明を進めていく」「最後まで証明をする」など段階的に目標を設定し、指導する。 ◎仮定やすでに正しいと認められている事柄を根拠にして、結論を図や用語などを用いて、導く過程や解き方を考察することができる。 <p style="text-align: right;">【見方や考え方】</p>

証明の進め方2 (生徒用ワークシート) 月 日 () 年 組 名前

証明の進め方2

(基本の確認1)

右の図で、 $AB=AC$ 、
 $\angle ABE=\angle ACD$ ならば、
 $BE=CD$ であることを証明しな
 さい。



【仮定】

=
 =

【結論】

=

【証明】 $\triangle ABE$ と において

$AB=$ () …①
 $\angle ABE=$ () …②

は、共通…③

したがって

$\triangle ABE \equiv$

()

ゆえに

=

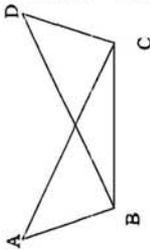
結 論

留意点1 記号を正しく
読むように指導する。

留意点2 指導者はコン
パス・定規を用いて作図
し、生徒に模範を示す。

(基本の確認2)

右の図で、 $AB=DC$ 、 $AC=DB$ ならば
 $\angle BAC=\angle CDB$ であることを証明しなさい。



【仮定】

=
 =

【結論】

=

【証明】

$\triangle ABC$ と において

$AB=$ () …①
 $AC=$ () …②
 $BC=$ () …③

したがって $\triangle ABC \equiv$

()

ゆえに

=

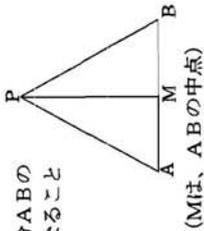
結 論

留意点3 「仮定」と
「結論」は、問題文を読
み取り、記号で書くよう
に指導する。

留意点4 「証明」の全
体を示してあるので、自
分で進めていくよう指導
する。分らないところ
は、教科書などを参照さ
せる。

(基本の確認3)

右の図で、 $PA=PB$ で、 M が線分 AB の
 中点ならば $\angle AMP=\angle BMP$ となること
 を証明しなさい。



【仮定】

=
 = (Mは、ABの中点)

【結論】

=

【証明】

$\triangle APM$ と において

$PA=$ () …①
 $AM=$ () …②

は、共通…③

したがって、

$\triangle APM \equiv$

()

ゆえに

=

結 論

留意点5 「証明」は板書せず、発表を聞き
 取らせる。作図の中には、等しいことを示す
 マークを記入していく程度にする。

作図と証明の練習 月 日 ()

年 組 名前

【仮定】

「仮定」「結論」は式で書く。

【結論】

【作図】

「作図」は、定規・コンパスを使う。道具を使い作図する習慣を身に付け、作図による表現力を高めていく。

【証明】

「証明」は文字や式を省略せず、丁寧に書く。

板書の作図から自分一人で「仮定」「結論」「証明」を書くように指導する。途中で分からなくなったところがでてきた場合には、ワークシートを手掛かりに、証明を再現していく。

「作図と証明の練習」と自己評価は毎時間行うことで、証明の必要性と方法の定着を図る。

【自己評価】 あてはまるものに○を付けてください

- | | | | |
|--------------|------------------|------------------|---------------|
| ①今日の学習は、 | ア よく理解できた | イ 半分くらい理解できた | ウ 理解できなかった |
| ②今日のワークシートは、 | ア 自分の力で進められた | イ 半分くらい自分でできた | ウ 自分ではできなかった |
| ③作図と証明の練習は、 | ア ワークシートを見ないでできた | イ 半分くらいワークシートを見た | ウ 全部ワークシートを見た |

証明の進め方2 ～今日の課題～

()組()番 名前()

[重点]二等辺三角形の性質

右の図は、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ で、 $\angle CAB = \angle CBA$ である。対角線 AC 上に $AD = CE$ となるように点 E をとるとき、 $CD = BE$ となることを証明せよ。

【仮定】

【作図】 (等しいところにマークをつけよう)

目標1「仮定として示されていることを作図の中書き入れる」

【結論】

目標2「問題文より、仮定と結論を区別して記述する」

【証明】

目標3「合同となる三角形を見付け、証明を進めていく」

目標4「最後まで証明を記述する」

