（様式 1）

大学院派遣研修報告書

所属校	東京都立戸山高等学校	氏 名	荻野　大吾
派遣大学院	東京理科大学大学院	専攻・コース	理学研究科・理数教育専攻
研究のテーマ	高等学校数学における視覚化教材の開発		

Ⅰ　研究の概要

1．　研究の動機

数学を歴史的に考察すると、その対象を具体的な事象から抽象的な対象へと徐々に変化させ、拡大させることによって発展してきた。特に、19世紀後期に始まる現代数学では、複素数や無限遠点等、現実に存在しないものまで含んだ対象を研究材料として取り扱っている。

数学教育における指導の順序は、上の数学的発展を重視する立場とそうでない立場がある。すなわち、

① 数学の歴史的流れを重視する歴史的発生の順序で指導する立場
② 数学の基礎基本となる対象から指導し、徐々に応用的な事象に流れる数学の系統性を重視する立場

の2つがあると言われている。現在の日本の小・中・高等学校の算数・数学科のカリキュラムから指導の流れを考察すると、①の歴史的な流れにしたがって指導されていると考えられる。それは、現行の学習指導要領の算数・数学科の目標の次のような語句から読みとることができる。

- 数量や図形についての算数的活動を通して、基礎的な知識と技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに､活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き、進んで生活に生かそうとする態度を育てる。（小学校）
- 数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し､事象を数理的に考察する能力を高めるとともに､数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り､それらを進んで活用する態度を育てる。(中学校)
- 数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。（高等学校）

小学校から中学校・高等学校に進むにつれて、歴史的な流れに沿って進んでいることが明らかである。すなわち、小学校1学年の自然数に始まり、高等学校の数学Ⅲにおいて、17世紀のニュートンとライプニッツの微積分学で終了している。一方、②の数学の系統性を重視する立場は、昭和45年に公示された現代化の学習指導要領の中に読みとることができる。

この学習指導要領では、集合を基礎・基本として、数学の内容を発展させようとしている。したがって、現在の日本の数学のカリキュラムにおいては、小学校での具体的な教材から、中学校・高等学校へと徐々に一般化・抽象化された内容が指導されている。特に、高等学校では具体的な教材がほとんど見あたらないと言える。

しかし､高校生の中には抽象的な思考を苦手とする生徒が数多く存在している。これらの生徒は抽象的な内容をそのまま暗記することにより学習をすませ､数学の本質的な考え方を定着させない場合もあると考えられる。このことが数学嫌いを増加させる一つの原因と考えられる。抽象的な教材を具体化することにより、その内容の本質をとらえさせ、興味・関心をもたせることが可能である。その具体化の一つの方法として、数学教育の中で実施されている視覚化に焦点を当てた。

２．　研究の目的と方法

本研究では、視覚化教材に焦点を当てて次の項目を研究することを目的とする。

- 視覚化教材の定義・意義・分類・特徴について明らかにする。
- 視覚化教材の作成とその評価を行う。
- 生徒たちに、視覚化を通して問題解決をさせる指導法を考察する。

この目的達成のために、先行研究や高等学校の教科書及び参考書を分析することにより、視覚化の本質を調べてゆく。さらに、視覚化の定義に基づき、教材を作成する。そして、生徒に対して授業実践を実施し、事後の生徒アンケート調査により作成教材の評価を行う。最後に、生徒たちが視覚化をする指導法について研究する。

３．　研究内容

一般によくなされている視覚化には「グラフを用いて不等式を解く、最大値・最小値を求める」、「微分法における増減表」、「場合の数の樹形図」、「確率分布表」、「集合のベン図」等がある。その中でも微分法の問題を解く場合、導関数を求めた後、生徒は迷わず増減表をかく。また、ドモルガンの法則を導く場合、集合論では要素を使う方法と集合の分配法則を使う方法があるが、高校生に対してベン図を使わずに説明するのは難しい。これらは視覚化に適した教材ということが言える。

教材は、「自然数の二乗の和の導き方」、「フィボナッチ数を表す双曲線」、「分数式を直線の傾きと見る視覚化」を開発した。

授業実践は、正方形、六角形、四角錐、立方体の図形数に関する教材を中学校２校と高等学校１校で行った。

生徒に視覚化を促すにはどうすべきかを確率、ベクトル、二次不等式について、生徒の実態を踏まえ、考察した。ここでは、確率の教材について述べる。

（１）授業実践

授業日時：平成17年(2005年)11月５日(土)第１校時

対象生徒:都立Ｔ高等学校第２学年生徒17名

数学Ⅱの授業で、次の問題を実践した。数学Aの内容なので約1年ほど前に習ったところである。多少、唐突な感じであったかもしれないが、この内容ならば予備知識なしに解けると考え、実践した。

確率の問題（配布プリントの内容）

このプリントは生徒の皆さんがどのように考えるか調べるためのものです。

途中の、説明の文章、式、図、表等の考え方を詳しく書いてください。

1つのさいころを2回投げる。出た2つの目について、次の確率を求めよ。

（問１）　和が3の倍数。

（問２）　積が3の倍数。

（問３）　積が偶数。

（問４）　最大値が３以上５以下。

（２）生徒の反応

（問１）　和が3の倍数。

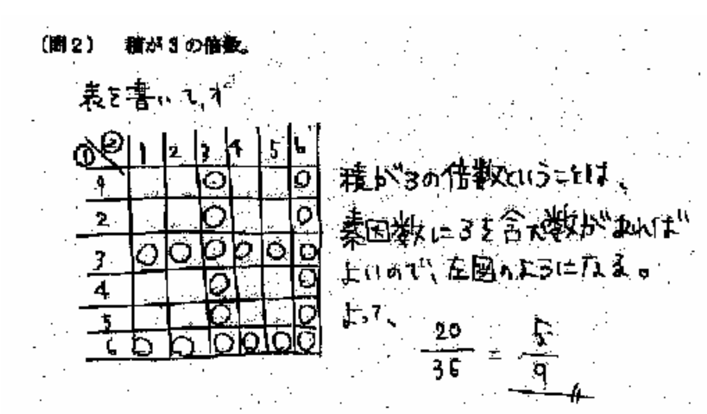
正解14名中、視覚化した者8名(表2名,樹形図6名)、視覚化しなかった者:6名

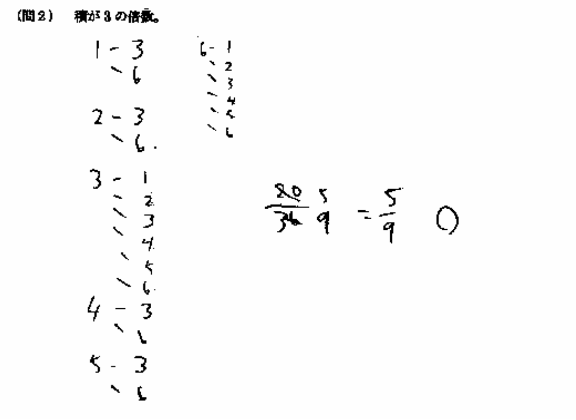
不正解3名中、視覚化した者1名(表1名,樹形図0名)、視覚化しなかった者:2名

（問２）　積が3の倍数。

正解:11名中、視覚化した者７名（表:４名、樹形図:３名）、しなかった者４名

不正解:６名中、視覚化した者０名（表:０名、樹形図：０名）、しなかった者：６名





（問３）　積が偶数。

正解:14名中視覚化した者7名(表3名,樹形図4名),視覚化しなかった者7名

不正解:３名中視覚化した者０名（表:０名、樹形図:０名）、しなかった者：３名

（問４）　最大値が３以上５以下。

正解:６名中、視覚化した者２名（表：１名、樹形図：１名）、しなかった者４名

不正解:11名中、視覚化した者０名、視覚化しなかった者11名

（３）考察

（問１）～（問４）の正解者延べ45名中、視覚化した者は24名であった。視覚化しなかった者は21名だった。視覚化しなかった者の中にも頭の中で、何らかの表のようなものを作り考えていたかもしれない。唐突にこの内容を実践したのだが、視覚化した生徒がこれだけいたことは視覚化が有効な例と言える。不正解者延べ23名のうち視覚化して間違えた者はわずか１名だった。（その生徒は、（問１）で表をかいたが３の倍数が出てくる規則性に気付かなかった。）残りの22名は視覚化しなかった。このさいころ２個の問題に関しては、教科書にもあるように表による視覚化が有効と思われる。しかし、表の中に印を付けていく際、規則性が見付けられずに間違えてしまった生徒がいたように、規則性を見付けることが大切なのであり、その方法として視覚化が有効ということであろう。

４．　研究結果

（１）学会・研究会での発表

①東京理科大学数学教育研究会数学教育シンポジウム（諏訪東京理科大学）にて研究発表。
（平成 17 年８月 27 日）

②日本数学教育学会第 38 回数学教育論文発表会（山梨大学）にて研究発表。
（平成 17 年 10 月 30 日）（別紙添付資料６ページ分参照）

③東京都高等学校数学教育研究会研究発表会（新宿山吹高等学校）にて研究発表。
（平成 17 年 12 月９日）

（２）成果

①授業で公式を導き出すとき、教師が導き出せば、簡単に公式をつくることができ、授業を進めることはできる。しかし、その方法でなぜ公式をつくれるのか分からない場合もある。公式のつくりかたを覚えなさいと言ってしまえば、公式そのものを覚えなさいということとほとんど変わらない。しかし、視覚化することにより、なぜそうなるのかが見えるため、生徒にとって分かりやすいものになった。

②視覚化教材を研究することにより、視覚化教材の具体例や特徴を知ることができた。式や話で説明するのではなく、視覚的に説明することにより、視点が変わり、生徒の目を引くことができた。視覚化することにより問題の全体像が見え、規則性、構造が見えた。

③その生徒にとって具体的なもの、身近なもので説明することが有効であり、生徒によっては式や文の方が分かりやすいこともあり得ることが分かった。視覚化教材の方がその生徒にとって具体的と感じるのなら視覚化は有効である。個人差が出やすいのでその個人の経験も大

切である。研究を始めた当初は視覚化によって何でも、誰にでも分かりやすくなると思っていたが、個人差が出るということが分かった。

④生徒にとって、グラフで視覚化するときはグラフをよく理解していることが前提で、立体図形で視覚化するときは立体的な感覚が前提である。視覚化することと同じくらいこの前提となる力を付けさせることが重要であることを知った。図形の問題で図が与えられておらず、条件が式や文で与えられている場合、図がかけない生徒がいる。二次関数の式変形ができてもグラフは苦手という生徒がいる。中学校まで数学は得意で、特に式の計算と図形は得意だが、関数になってから分からなくなったという生徒も多い。そのような生徒には視覚化させる指導が必要である。

⑤生徒はいくつもの視覚化方法を使えた方がよい。例えば確率の問題を解くのに、樹形図を使うのか表を使うのかいくつか知っている上で最適な方法を生徒が選ぶのがよい。その上で、生徒が自分から視覚化する力を身に付けさせる必要があることが分かった。

⑥現行の学習指導要領では視覚化しているが、逆に視覚化しない方が生徒にとって分かりやすい例もあることが分かった。

Ⅱ　学校等における研究成果の活用計画（授業活用・研究会計画など具体的に記入）

今後、次のように研究成果を活用したい。

（１）　授業・補習

例えば、自然数の二乗の和の公式の導き方については、今回開発したもの以外にも、数年前から、いくつか教材を集めている。これらを授業や補習で活用するつもりである。

授業では、教師の板書や配布プリントで視覚化して教えるだけでなく、生徒自身に抵抗なく視覚化させる指導を心がける。

（２）　数学同好会での活動

平成 17 年５月から数学同好会をつくり、週に一回放課後、生徒の活動を指導している。現在は、高校生向けの数学史のテキストを輪読し、今学期中に終える予定である。次は、生徒が興味を引く教材として、フィボナッチ数に関する本を輪読したいと考えている。ここでも、本研究で開発した教材を活用したい。

（３）　校内研修

大学院では数学の研究の方法も学ぶことができた。その一つとして、少人数のゼミがある。内容は勤務校の数学科教員と相談して今後決めることになるが、１～２週に１回程度のペースで数学かまたは数学教育に関する研修をゼミ形式で行いたいと考えている。

（４）　千代田区立九段中学校にて出前授業

平成 18 年３月７日、視覚化教材の一つである多項式の加減乗除、因数分解、因数定理、連立方程式における係数分離法（式の計算を係数だけ取り出して計算する方法）を中学３年生に対し、実践する。良い結果が出せたら次回研究発表をする際、報告したい。

（５）　第 88 回全国算数・数学教育研究大会（東京学芸大学）・特設部会にて研究発表

平成 18 年７月 31 日。特設分科会とは、今回初めて設置されたもので、現職教員の大学院での研究を発表する場である。ここでは、今回の研究の他に、自分が経験した東京都の大学院派遣についても話をしたい。

大学院派遣研修成果活用状況

所　属　校	都立戸山高等学校	氏　　　名	荻野　大吾
派遣大学院	東京理科大学大学院	専攻・コース	理学研究科・理数教育専攻
研究主題	高等学校数学における視覚化教材の開発		

<table>
<tr><td>1
所属校での成果活用</td><td>平成 17 年度４月に現任校に転勤し、６月に数学に興味がある生徒を集めて数学同好会をつくった。まず、この年は高校生向けの数学史のテキストを輪読した。
平成 18 年度の活動テーマは、「数学を視覚的に考える」である。テキストとしては市販の書籍を用いた。
自分が大学院で学んだことには数学や数学教育の内容だけでなく、ゼミ形式での研究や研究発表の方法などもある。数学同好会でも輪読の中でできるだけ生徒に黒板の前に立たせて自分の考えを述べさせるようにした。その結果、文化祭にてポスターによる研究発表をさせることができた。生徒は、今から来年度も発表をしたいといっている。
文化祭以後のテーマを現在模索中だが、初等整数論・整数問題をやりたいという声が出ている。自分のテーマは視覚化だが、大学院でテーマを絞る際、整数も考えていたので、たとえば一次不定方程式を平面上の直線が格子点を通ると見る等、視覚化と関連させてテーマを決めたい。</td></tr>
<tr><td>2
委員会・研修会での成果活用</td><td>まず、平成17年10月、日本数学教育学会数学教育論文発表会（山梨大学）にて論文発表をした。（添付資料あり）　内容は自分の研究テーマである「高等学校数学における視覚化教材の開発」である。学会の研究発表会にて発表したことは何度かあったが、論文発表は初めての経験だった。平成18年度は論文発表ができなかったので、平成19年度は論文発表会にて発表したいと考えている。
次に、平成17年12月、東京都高等学校数学教育研究会研究発表会（新宿山吹高校）にて研究発表をした。内容は自分の研究テーマの内容と自分が経験した大学院派遣についてである。今後も、この大学院派遣制度で大学院で数学教育について研究してくれる人がいてくれたらという気持ちで発表した。
そして、平成 18 年７月、日本数学教育学研究発表会特設部会（東京学芸大学大学）にて研究発表をした。（添付資料あり）　特設部会とは、今回の研究発表会からはじめてできたもので、全国の小中高等学校の現職教員で大学院で勉強した人が発表する部会である。</td></tr>
</table>

3 成果を生かした研究授業等	平成 18 年７月、現任校近くの区立中学校の３年生対象にて数学の出前授業を行った。（添付資料あり）　その概要はこの中学校のホームページにものっている。内容は係数分離法による式の計算である。たとえば、中学生が小学校以来よく知っている２１×１３＝２７３と中学３年生がこの頃習った（２ｘ＋１）（ｘ＋３）＝２ｘ^2＋７ｘ＋３がよく似ていることから式の計算の仕組みを解説した。この方法を使うと（ｘ＋ｙ）^{4}の展開なども考えやすいという話をした。授業後に感想を尋ねたところ次のような感想を得た。 ○黒板の右に書いた式と左に書いた式に関係があることを知り、びっくりしました。 ○足し算とかけ算を並べてやるため、その特徴がよく分かりました。 ○数学の視点が変わったような気がしておもしろかった。 ○11^5と$(x+1)^5$の関係を説明されていたときはおもしろかったです。 ○ピラミッド型に計算していくとわかりやすいといことがわかりおもしろかったです。 ○小学校からやっていた計算にこんな発展があったなんて驚きました。 ○文字式の計算と整数の筆算のやり方の違いがわかりやすかった。 ○左右対称できれいでおもしろいと感じた。数学には色々な規則性があるんだなあと感じた。 ○１０倍して足す。ということを使えば簡単にできることを知り、驚きました。 ○計算の仕方が色々あって、すごくおもしろかったし、授業がわかりやすかったです。高校の授業が楽しみになりました。 ○自分の好きな「流れを持った数学」が、この授業では体験できたのでおもしろかったです。 ○普段の授業とは違い、とても新鮮で集中することができました。とても有意義でした。 ○便利なこと聞いた。数学というのは奥が深いんだなあと感じた。 ○発見も多くおもしろかった。 ○数や式の裏に隠されているものを引き出していくと簡単に式が展開できることに気づいた。 ○計算の仕組みをはじめて知った。
4 今後の活用計画等	本校は文部科学省のＳＳＨ（スーパーサイエンスハイスクール）に指定されている。平成 19 年度は大学院での研究成果を生かした数学のＳＳＨの講座を開講したいと考えている。今のところ次のような内容を考えている。 ① 数学を視覚的に考える内容 ② 高校数学の横断的、発展的な内容 ③ 上級学年や大学の内容を先取りするような内容 ④ 他教科（歴史や理科など）との関連する内容 いずれにせよ、教師の一方的な講義ではなく、生徒の活動を重視し、生徒の発表、プレゼンテーション等を多く取り入れた講座内容にしたい。現在は、本校におけるＳＳＨのあり方、他校での数学のＳＳＨの様子をよく知った上で、早くテーマを決め、準備に時間をかけたいと考えている。

平成18年7月日本数学教育学会（東京学芸大学にて）

1－1　高等学校数学における視覚化教材の開発

東京都立戸山高等学校　　荻野大吾

1.　　はじめに

東京都の長期派遣研修である，大学院設置基準第 14 条適用大学院派遣研修として平成 16 年度，東京理科大学理学研究科理数教育専攻に派遣される機会を得て研究をした．今回，自分が経験した都の派遣制度，東京理科大の大学院，自分が研究した視覚化教材について発表をする．

2.　　大学院派遣

（1）長期派遣研修

「大学院設置基準第１４条適用大学院派遣研修」は，都の教員が都内近辺の大学院に一年間派遣されて研究をする制度である．修士課程修了までに二年間かかるので，二年目は普通に都立高に勤務しながら修士論文を書く．上越教育大等の新教育大学院派遣については広く知られているが，第 14 条派遣の方を御存じない方が多いので，是非，多くの先生方に希望していただきたいと個人的に感じている．

（2）東京理科大学理数教育専攻

「東京理科大大学院理数教育専攻」は，現職教員の再教育を目的に平成 10 年に開設された大学院である．研究室は，池田文男先生のゼミに所属した．ゼミに所属している院生は学部新卒の他に，都内区立中学校，都立高校の教員や私立中高一貫校の教員もいる．夜間も授業が開講されているので，派遣でない方でも二年間で修了できるシステムになっている．

自分が大学院を希望した動機は，最近の教科教育が軽視されている（重視されていない）傾向，また，特に高等学校の教員は教科の専門性を高めるべきであるということ，そして，数学を勉強するからには，指導者のもとで勉強したいと考えたことである．

3.　　高等学校数学における視覚化教材

視覚化教材を研究し，平成 17 年 10 月末に山梨大学で行われた日本数学教育学会第 38 回論文発表会でも発表した．

高等学校の数学は小中学校の算数数学よりも生徒にとっては抽象的で，これが数学を苦手とする生徒が多いことの原因の一つであると考えている．授業ではできるだけ具体的な話から始めた方が生徒にとって数学を理解しやすい．数学は本来，証明を通して論理的に理解することが本質であるが，生徒に指導する際には，直観的に提示することも有効な方法であるといえる．そこで教材の視覚化を考えた．

先行研究を調べると，具象化，図形化，図的証明，イメージ化等，同じような研究はある．自分としては，視覚化教材を，「①座標を用いる方法，②図形を用いる方法，③図を用いる方法，④表を用いる方法，⑤事物化する方法，⑥係数分離法」の６通りに分類し考察した．視覚化には多少の欠点もあるものの，利点として，問題に興味・関心を持たせる．問題を別の視点から見ることができる．問題の意味を実感させることができると考えた．

そして「図形数に関する授業実践」として，自然数の２乗の和に関する教材を作成し，実践した．普通は$(k+1)^3-k^3$を展開して２乗の和を求めるが，今回の視覚化では図形数で考えた．まず自然数の和を，普通は，三角数を２つ組み合わせて，$n\times(n+1)$の長方形型にして説明するが，今回は対角線のn個を重ね合わせて一辺がnの正方形型にして説明した．次に，２乗の和を４角すい型の数と考え，立方体を３つに切断して４角すいが３個となることから説明した．

現在（平成 18 年４月），係数分離法に関する教材を考えている．実践して良い結果が得られれば，この大会（７月 31 日）で発表したい．

平成17年10月日本数学教育学会論文発表会(山梨大学にて)

第38回数学教育論文発表会論文集

高等学校数学における視覚化教材の開発
ー図形数に関する授業実践ー

荻野　大吾
東京都立戸山高等学校
(東京理科大学大学院)

高等学校の数学は、小中学校までの算数数学よりも抽象的である。すべての生徒に指導するためには、教材の具体化が必要であり、具体化の一つの方法として視覚化が考えられる。視覚化により、興味・関心を持たせられる、一つの問題を別の視点から見せられる、問題そのものや解法の意味を実感させられることにもなると考えた。

本研究はまず、先行研究を調べた上で視覚化とは何か、視覚化教材にはどのような種類があるか、そして、視覚化の注意点、利点について考察した。

次に、自然数の2乗の和を図形数で説明する教材を作成し、その教材に基づき授業実践をした。

最後に、実践を通して教材の評価について述べる。

1　研究の動機

授業では、できるだけ具体的な話から始めた方が、生徒は数学を理解しやすいと日頃から感じている。

小学校、中学校、高等学校と進むに従い、算数数学の内容は一般化、抽象化されている。高等学校の教材には具体的な教材が少なく、このことが数学を苦手とする生徒が多いことの原因の一つではないかと考える。

現在の数学は、数学者たちが具体的な事象を、長い年月をかけて抽象化したものである。山本 [6] は、「「味もそっけもない」出来上がった数学をいかにして理解すれば、真の深い理解がえられるのか、筆者は、対象を再び具象化する方略が有効であると考える。」と述べている。

また、池田 [1] は、抽象的な考え方を不得意とする高校生に量の一つである面積に着目し、面積を利用した二次関数の指導の教材を開発した。

3　図形数に関する実践

数列を授業で教えていて、自然数の 2 乗の和の公式を導くとき、「なぜ突然、3 乗の式を展開するのか」という質問がよくある。教科書にも 3 次式が出てくる理由は書いてない。このことは高校生にとって唐突であり違和感があるのであろう。

三角数や四角数等の図形数には興味を持つが、関数や階差数列となると難しいと思ってしまう生徒も多い。

そこで今回は、第 2.1.2 節の図形を用いる方法や第 2.1.5 節の事物化の教材である、四角すいや立方体を用いて視覚化する教材を実践した。

3.1　授業案

授業日：2005 年 7 月 14 日 (木)

対　象：都立 T 高等学校第 2 学年数学Ⅱ展開 3 クラス (18+18+17=53 名) 各 45 分

指導目標：「自然数の 2 乗の和の公式の導き方について、半年ほど前に授業で習った方法と視覚的な方法の両方で説明し、比較させる。」

導入

自然数の 2 乗の和の公式

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

の導き方について、本日は 2 通りの方法で説明することを伝える。

（1）**展開 1（従来の方法）**

まず、

$$A=1+2+\cdots+n$$
$$B=1^2+2^2+\cdots+n^2$$

とおく。A を逆に並べて、

$$A=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$
$$A=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

辺々加えて、

$$2A=n(n+1)$$

よって、

$$A=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

となる。次に、

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

の恒等式を用いて、

$k=1$ のとき、$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ のとき、$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

....

$k=n$ 〃 $(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

辺々加えて、

$$(n+1)^3-1=3B+3A+n$$

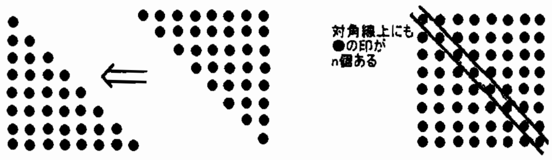
$A=\frac{1}{2}n(n+1)$ を代入し、B について解くと、

$$B=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が得られる。

（2）**展開 2（視覚化した方法）**

図のように自然数の和を、直角三角形型と見る。2 つの三角形状の図を動かし、結合させる。共通部分を斜めにつくる。正方形型と見ることができる。正方形状に並んでいる個数は、自然数の和の 2 倍から共通部分を引けばよい。



自然数の和を A とおく。

$$n^2=2A-n$$
$$A=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

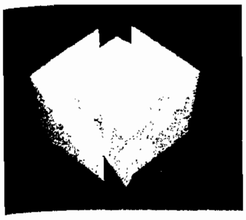
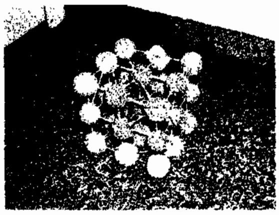
次に、同じように、

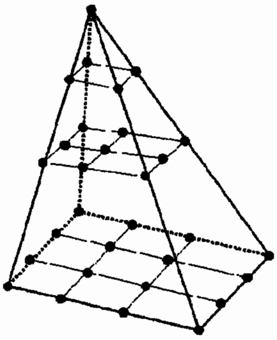
$$B=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

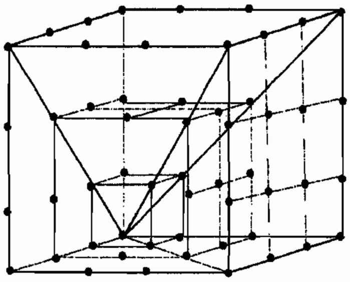
は、視覚的に（図形的に）どのような図になるだろうか。

四角すい型になることに気づかせる。

図を見せ、3 つの四角すい $(=B)$ を加えて重なっている部分 $(=A)$ を 3 つを引き、さらに対角線部分 $(=n)$ を加えることを考えさせる。次のような模型や図を見せる。





$$n^3 = 3B - 3A + n$$
$$B = \frac{1}{3}(n^3 + 3A - n)$$
$$B = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

まとめ

本日の授業について、プリントを配布し、感想を書かせる。

3.2　生徒の反応

生徒の実態として、53 名中、A の公式を覚えていたと答えた生徒は 31 名、B の公式を覚えていたと答えた生徒は 19 名だった。

B の公式の導き方について、**どちらの方がわかりやすかったですか。という問に対して回答した生徒の「人数」**は、

（1）展開 1（従来の方法）18 名

（2）展開 2（視覚化した方法）31 名

（3）無回答 4 名

であった。

つぎに、生徒の意見等で代表的なものは次の通りである。

どちらの方がわかりやすかったですかという問に対する「理由」

（1）と答えた生徒

- 計算するだけでよいから。
- 立体的だと重なる部分が難しい。

（2）と答えた生徒

- なぜ $(k+1)^3 - k^3$ がいきなり出てくるのかよく理解できないから。
- 模型もあり、実際に足したり引いたりする理由も目に見える。
- （2）は重なる点が難しいが、なぜそうなるかがわかるから良い。

本日の、自然数の和を視覚的に見るという授業に対する「感想」

3で（1）と答えた生徒

- 自分には向いていないけど、向いている人には向いていると思う。今まで習ってきた数学とは視点が違って面白かったと思う。

3で（2）と答えた生徒

- （2）を先にやって（1）をやる方がよい。視覚で感覚的に理解してから論理的に考えるとわかりやすい。
- 漠然ととらえていたものを具体的にみれて面白かった。
- 新しい公式が出てくると覚えるだけだが、公式を丸暗記するより全然良い。
- 平面の方はわかりやすかった。視覚的にやっていたことで式の意味がわかりやすく公式を忘れても自分で考えられると思う。

4 まとめ

4.1 教材の評価

授業実践を終え、成果と反省は次の通りである。

- 授業で $(k+1)^3-k^3$ が唐突に出てくることに疑問を持つ生徒が多いことを前提に今回授業をしたが、そのような生徒がどのくらいいるのか調べる必要があった。このような疑問を持たない生徒も多少いるのではないかと感じた。
- 自然数の 2 乗の和が四角すいの形になることは多くの生徒が気づいた。しかし、立方体になることを気づかせる時間がなかった。また、図形を立体的に見ることが得意でない生徒もいる。R.R. スケンプ [4] も視覚的記号は「より個人的な思考を表現する」と述べているように、生徒により差が出やすい。
- 視覚化した教材を実践することにより、多くの生徒の目を引いたのは確かである。今までと違う視点から見ることにより、驚きがあり、興味・関心を引かれたと感じた生徒が多かった。
- 生徒の感想からも、（2）の教材は成果が上がったと考えている。しかし、Σk^3やΣk^l にも発展させることを考えると、（1）の教材も無視できない。生徒が自ら（2）を発見して、その後、（1）$\to \Sigma k^3 \to \Sigma k^l$ と説明するような授業の流れを考えたい。

4.2 今後の課題

今後、この研究を進めていく上で、以下のことが課題として残っている。

- 今回の実践を通常の数列の授業の流れの中で実践したい。
- 視覚化に向いている教材とそうでない教材を分類し考察したい。
- xy の関係式はグラフで一般化しやすいが、他に一般化できる視覚化教材がつくれないか考察したい。
- 第 2.2 節の視覚化の注意点を考慮した上で、第 2.3 節 の視覚化の利点が生きる視覚化教材をさらに開発したい。

参考文献

[1] 池田文男、2004 年、「面積概念を利用する高校数学」、第 37 回日本数学教育学会数学教育論文発表会論文集、p109-114

[2] 岩崎秀樹、1987 年、「図的表記の意味と指示－図的表記の分類と分析の観点について－」、第 20 回日本数学教育学会数学教育論文発表会論文集、p77

[3] 折ロ一彦、1990 年、「算数教育における「表現」についての一考察－図的表現の活用状況とそれに関する意識調査をもとに－」、第 23 回日本数学教育学会数学教育論文発表会論文集、p411

[4] R.R. スケンプ:著、藤永保・銀林浩:訳、1973 年、「数学学習の心理学」、新曜社、p83-99

[5] 白坂繁、1988 年、「Σk^2とΣk^3を求める簡単な 2 つの方法」、日本数学教育学会誌第 70 巻第 3 号、p28-34

[6] 山本忠、1995 年、「具象化による数学理解の方法－重心の方法の幾何への応用を中心に－」、日本数学教育学会誌第 77 巻第 1 号、p2-3

Ｈ１８年７月 15 日　戸山高　荻野

中学校での出前授業「係数分離法での式の計算」

Ⅰ．　整式の計算・展開

問１　$A=21$，$B=13$ とする。次の計算をせよ。

（１）$A+B$　（２）AB

問２　$A=2x+1$，$B=x+3$ とする。次の計算をせよ。

（１）$A+B$　（２）AB

問１と２は似ていないか。縦書きで計算してみせる。係数だけを取り出して計算する方法（係数分離法）がある。どこが違うか。整数の計算と違い，文字式の計算では繰り上がりがない。係数が負になる場合もある。

計算させてみる。

問３　$A=32$，$B=17$ とする。AB を計算せよ。

問４　$A=3x+2$，$B=x+7$ とする。AB を計算せよ。

問５　$A=5x+3$，$B=x-1$ とする。AB を計算せよ。

問６　$A=x^2+x+2$，$B=x+3$ とする。AB を計算せよ。

Ⅱ．　二項定理（パスカルの三角形）

問７　$A=11$ とする。次の計算をせよ。

（１）A^2　（２）A^3　（３）A^4

問８　$A=x+1$ とする。次の式を計算せよ。

（１）A^2　（２）A^3　（３）A^4

Ⅲ　整式の計算・因数分解（たすきがけ）

問９　$2x^2+7x+3$ を因数分解せよ。

係数分離法で考えさせる。展開と同じ（逆の）しくみであることに気づかせる。たすきがけ。

Ⅳ　連立方程式（はきだし）

問 10　$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+y=5 \end{cases}$ を解け。　$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to x=2,\, y=3$

問 11　$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+2y=5 \end{cases}$ を解け。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to x=3,\, y=1$$

整式の割り算や因数定理（組み立て除法）の話もしたいが、時間的に無理。