

## 「置き換え」による問題解決力を育成する教材と指導に関する研究 －多角形の内角の和に焦点を当てて－

所属校：中野区立第五中学校  
氏名：瀧川 英知  
派遣先：東京学芸大学大学院

キーワード：置き換え・問題解決・1対1対応・多角形の内角の和

### I 研究の目的

生徒が数学の問題を解決しているときに、与えられた図の捉え方によって解決が容易になったり、また解決のスピードが劇的に進んでいく場面を見ることがある。ここでは、解決しようとしている問題を、他の容易な数学の問題場面に置き換えて解決していくという「置き換え」の手法を捉えることができる。そこで、そのような「置き換え」で問題解決するときに見られる解決の特徴は何であるのか、また、そのような考え方を育成できる教材および指導法はどのようなものか、これを明らかにしていきたいと考え、現行の中学校数学の学習内容である「多角形の内角の和」を取り上げ、「置き換え」が有効にはたらく教材として開発し、授業を実施することにより、「置き換え」による問題解決の有効性と可能性を検証することが、本研究の目的である。

### II 研究の方法

研究の目的を達成するために、以下の5つの課題を設定する。

- 「置き換え」の意味および「置き換え」による問題解決の特徴を明らかにする。
- 「置き換え」による問題解決力を育成する教育的価値を明らかにする。
- 「置き換え」によって解決できる問題の事例をあげ、「置き換え」の有効性を示す。
- 「多角形の内角の和」に焦点を当て、「置き換え」に着目した教材開発をする。
- 開発した教材をもとに授業を実施し、「多角形の内角の和」における新たな指導法が可能であることを示す。

### III 研究の結果

#### (1) 「置き換え」の意味及び問題解決での特徴

半田(1995)をもとに「置き換え」の意味を「数学の問題を解決するために、より解決しやすい数学の問題場面に置き換える」こととした。そして、事例を具体的に考察することで、「置き換え」による問題解決での特徴として、次の2点を明らかにした。1点目は、「置き換え」が有効にはたらく問題場面では、その問題における数量間での1対1の対応関係が捉えることができ、そ

の1対1対応が「置き換え」を可能にすることである。

2点目は、与えられた問題を他の容易な問題場面に換えて解決することは、その問題のもつ本質的な構造を捉えて解決していることになる。したがって、「置き換え」が有効にはたらく問題場面では、問題のもつ本質的な構造を捉えての問題解決になる。

#### (2) 「置き換え」による問題解決の教育的価値

「置き換え」が有効にはたらく事例を考察することで、次の3点を「置き換え」による問題解決力を育成する教育的価値として明らかにした。1点目は、関数の機能を生かす考え方を育成することである。2点目は、一般化の考え方を育成することである。3点目は、論理的な見方や考え方を育成することである。

#### (3) 「置き換え」によって解決できる問題の事例考察

「置き換え」によって解決できる問題の事例を取り上げ、その事例について何と何とを1対1対応させて、その結果、与えられた問題がどのような容易な問題に置き換えられ、その「置き換え」から見いだせることを問題解決にどう生かすかについて考察を行い、「置き換え」の有効性を示した。例えば、円周上の等分点とその点を結んでできる三角形の種類の問題では、円周上の等分点とそれによって分けられる等しい弧を1対1対応させ、さらに等しい弧の数の組とできる三角形の種類とを1対1対応させ、その結果、等分点から三角形の種類を求める問題が、等分点によって分けられる等しい弧の数の組から三角形の種類を求める問題に置き換えられ解決することができる。

#### (4) 「多角形の内角の和」における「置き換え」に着目した教材開発

「多角形の内角の和」における現行の指導および指導の問題点として、次のことがあげられる。現行の指導では、1つの頂点からひける対角線の数、またその対角線によって分割される三角形の数を表に表し、求まる数値の関係から一般式を見出していく。しかし、数値を帰納して分割される三角形の数を求めることはできるが、その三角形の数の増加の傾向についての変化の割合が一定であることの根拠を、表からでは明確に捉えることができない。このことが指導の問題点であ

る。この指導の問題点を解決するために、次の教材を開発した。

多角形の内部に1点を取り、その点から各頂点を結んでできる線分によって分割される三角形に着目し、その三角形の個数を求めることで、多角形の内角の和を求めていく方法に焦点を当てる。この解決方法を「内部点による三角形分割」と表現し、この方法においては、多角形の辺と分割される三角形の1辺とを1対1対応させ、その結果、三角形の個数を求める場面を辺の数を求める場面に置き換えることができる。多角形の辺はその多角形に依存しており、したがって、辺の数は容易に求まる。また、分割される三角形と多角形の辺の1対1対応に着目することで、 $n$ 角形の内角の和を求めるときに根拠のある論理的な説明が可能になる。さらに、星形多角形の先端にできる角の和の解決方法においても、一般の多角形での解決方法と同様な「内部点による三角形分割」が有効である。このことから一般の多角形・星形多角形において「内部点による三角形分割」での解決方法が統合でき、そのことによって、多角形の内角の和を一般化することができる。

また、多角形の1つの頂点から対角線をひき、その対角線によって分けられる三角形の個数を利用した解決を「頂点からの三角形分割」と表現する。この場合は、対角線と分割される三角形の1辺とを1対1対応させ、その結果、三角形の個数を求める場面を対角線の数を求める場面に置き換えることができる。この「置き換え」により、さきの指導の問題点の解決をはかることができる。

#### IV 考察

##### (1) 実際の授業及び評価問題の結果からの考察

考察の観点としては、次の①～④とする。

- ① 「内部点による三角形分割」において、分割される三角形の数を求める問題を多角形の辺の数の場面に置き換えて解決する「置き換え」の有効性。
- ② 「頂点からの三角形分割」において、分割される三角形の数を求める問題を1つの頂点からひいた対角線の数を求める場面に置き換えて解決する「置き換え」の有効性。
- ③ 星形多角形における「内部点による三角形分割」での解決の有効性。
- ④ 「置き換え」による問題解決のよさ。

観点①では、多角形の辺と分割される三角形とを1対1対応させ、そのことから、三角形の個数を求める問題場面を辺の数を求める場面に置き換えて解決していることを、授業での生徒の反応や評価問題の結果よ

り捉えることができた。また、 $n$ 角形の内角の和を求めるときに、その「置き換え」による問題解決で、根拠のある論理的な説明が、ワークシートや評価問題の結果に示されていた。このことから、この「置き換え」による問題解決の有効性は高いと考える。

観点②では、対角線と分割される三角形とを1対1対応させ、そのことから、三角形の個数を求める問題場面对角線の数を求める場面に置き換えて解決していることが、授業での生徒の反応や評価問題の結果より捉えることができた。また、 $n$ 角形の内角の和を求めるときに、その「置き換え」による問題解決で、根拠のある論理的な説明が、ワークシートや評価問題の結果に示されていた。このことから、この「置き換え」による問題解決の有効性は高いと考える。

観点③では、星形多角形の先端にできる角の和を求めるとき、「内部点による三角形分割」に着目して解決していることが、ワークシートや授業での生徒の発表で見ることができた。評価問題においても、星形七角形、星形九角形での先端にできる角の和を求めるときに、9割以上の生徒が、「内部点による三角形分割」で解決をはかっていた。このことから、「内部点による三角形分割」での解決の有効性は高いと考える。

観点④では、三角形の個数を求めるのに、辺の数から求めることができるという解決しやすい問題に置き換える「置き換え」のよさを生徒の学習感想から捉えることができた。

以上より、「多角形の内角の和」の指導において、「置き換え」に着目することで、次の4点を成果として考え、また新たな指導法の手がかりが得られたと考える。

- ・辺と三角形の1対1対応、対角線と三角形の1対1対応を通して、1対1対応の見方を育成できること。
- ・「置き換え」によって、問題解決が容易なることを理解できること。
- ・「置き換え」に着目することによって、 $n$ 角形での分割される三角形の個数を求めるときに、根拠のある論理的な説明ができること。
- ・「内部点による三角形分割」による解決が、星形多角形の先端の角の和の場合でも有効にはたらくこと。

##### (2) 今後の課題

「置き換え」による問題解決が有効にはたらく教材を開発することである。

#### 引用文献

半田進(1995)「考えさせる授業 算数・数学 実践編」東京書籍