

派遣者番号	R4K21	氏名	中嶋 広大
研究主題 —副主題—	児童の割合の理解に関する考察 —均質性の理解に着目して—		
派遣先大学	東京学芸大学	指導担当者	中村 光一
所属	港区立芝小学校	所属長	川原 哲郎

キーワード：割合 均質性

要旨： 本研究は、特に、前田(1960)の「均質性」に着目して割合学習における児童の理解の様相を特定して学習指導の示唆を得ることを目的とし、ゴムひもと果汁入りジュースを題材として調査問題を開発した。質問紙調査とインタビュー調査を行った結果を「事象の均質性」と「量の均質性」の二つを視点に分析し、図のように児童の均質性に関わる理解の様相を特定することができた。

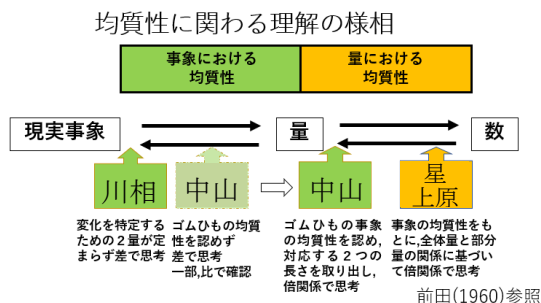


図 本研究に関わる均質性の理解の様相

(図中の名称は仮名)

児童の均質性の理解の様相から以下の3点の学習指導の示唆を得た。1点目は、比の異なるゴムひもを段階的に取り扱い、全体量の変化に伴って部分量が増加することや、基準量の比の違いに気付かせること。2点目は、ゴムひもの見かけ上の変化と値の変化を実測して対応させ、ゴムひもを均質な事象として捉えさせること。3点目は、全体量と二つの部分量からなる異なる事象を提示し、その共通点を考えさせることで、全体量と部分量の関係から数量関係を捉えられるようにすることである。

1 研究の背景と目的

筆者はこれまで、児童の割合についての理解の困難さに問題意識を抱き、三度の研究授業を重ねてきた。一度目は、比の三用法に着目した計算方法に関する研究授業、二度目は、差による関係の見方から倍による関係の見方への移行を目指した整数倍の研究授業、三度目は、「同じ割合」を考える活動を通して2量の関係を表す数としての割合の意味理解を図った研究授業であった。しかし、授業実践を重ねる度に、新たな児童の困難さと遭遇し、児童の割合の理解の進展を図ることの難しさを痛感した。

割合の理解について市川・高橋¹(2022)は、「「割合」は、全国学力・学習状況調査の結果を引用するまでもなく、その指導が難しい学習内容の一つである。」とし、「それは、その困難性が多岐にわたり、何をもって子供たちの割合の理解が進んだのかを判断できるのかが明確ではないからである。」(p1)と述べている。

市川らの指摘から、指導改善の示唆を得るためには、指導方法にばかり目を向けるのではなく、児童が割合に関わる問題を解決していく過程で表出する理解の様相を特定していく必要があることが分かった。

また、中村²(2002)は、割合に関する研究の動向を分析し、児童の割合の概念的な理解を明らかにするための質的な調査が不足していることを課題視している。

以上の指摘を受け、筆者は特に、前田³(1960)の「均質性」に着目して割合学習における児童の理解の様相を特定し、学習指導の示唆を得ることを目的とする。なお、前田(1960)の均質性については、以降で詳述していく。

本研究の目的を達成するため、三つの課題を設定した。第一の課題は、割合や均質性に関わる先行研究を概観し、本研究の位置付けを明確にすること。第二の課題は、均質性の理解の様相を明らかにするための調査問題を開発すること。第三の課題は調査結果を分析し、均質性の理解の様相を明らかにし、学習指導の示唆を得ることである。第一の課題については、本稿では、紙幅の都合上割愛する。

2 割合

割合は、倍の言い換えとしたものから、百分率、歩合、比など複数の表現方法や幅広い学習内容を含んでいる。また、日常語の「割に」などと用いられることから、定義を明確にし、児童間や教師間で共通認識をもつことが難しい。

和田⁴(1959)は割合の言葉の意味を明確にするため、割合が教育用語として最も初期に取り上げたものとして、佐藤良一郎の「小学校算術教育概論」を引用した。そして、佐藤が示した割合の日常での用いられ方や割合が比や歩合も含むもっと広いものとして取り扱われるべきである、という考えをもとに「要するに割合とは、二つの量、それが同種類であろうと異種類であろうと、これらを見比べるときに生まれてくる観念である。」(pp206~207)とした。

日常的な視点と数学的な視点の双方から割合について言及したこの考えを本研究における割合として捉えていくこととする。

なお、前田(1960)では、倍と割合、割合と比の違いについて言及しているが、本研究では、児童の事象の捉え方や量の捉え方を考察対象としていくため、前田のように厳密に区別はせず、2量のうちの一方の量を基準としてもう一方の量を相対的な大きさとして表した数を割合として考えていくこととする。

¹市川啓(2022). 論説(「はじめに」も含む). 市川啓, 高橋丈夫, 青山尚司, 加田希支男(編), 算数教材研究 割合 (pp1-28.). 東洋館出版社.

²中村享史(2002). 割合指導に関する研究の動向と今後の方向. 日本数学教育学会誌 84(8), pp14-21.

³前田隆一(1960). 割合. 赤羽千鶴, 古賀昇一, 前田隆一, 森規矩雄(編). 新算数教育講座 第三巻 数量関係 (pp. 239-268). 吉野書房.

⁴和田義信(1959). 割合. 実践研究講座 算数科指導の科学. 東洋館出版. pp205-219.

3 前田(1960)による均質性

3.1 割合が考えられる根拠としての量の均質性

前田(1960)は「割合ということが考えられる根拠は、量の均質性にあるということが出来る。」(p242)と述べ、次の図1を示した。

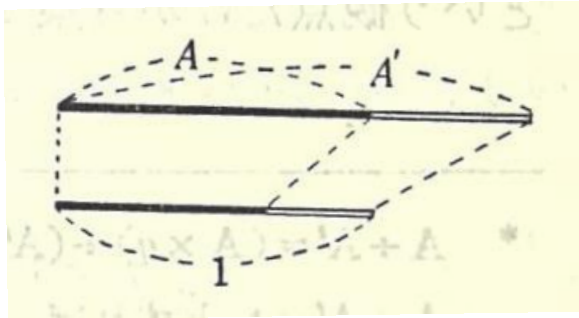


図1 前田の均質性の説明(左)

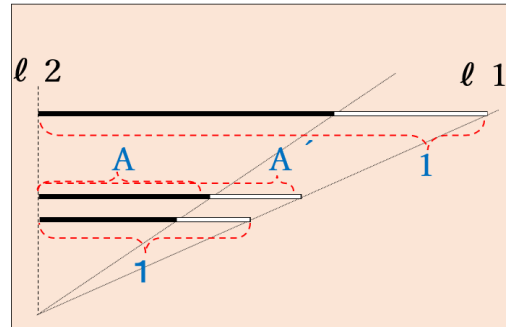


図2 筆者の均質性の解釈(右)

前田(1960)は、この説明として、量Aの量A'に対する相対的な大きさを求めるのに、A, A'の代わりに、その線分図と相似な線分図で表される二量について相対的な大きさを求めても同じことになるとし、その根拠を $A \div A'$ は、A, A'を同じ数で割ってもかけても値が等しいとした。

また、前田(1960)は、均質性は外延量の特徴であり、割合が考えられる量は外延量であると述べ、外延量を加減や等倍、等分ができる量として定義付けている。

以上のことから、均質性を認めるとは、図2のように、2量(A, A')を等倍したり等分したりしても2量の関係は変わらないこと、つまり比例関係を認めることであるとする。

3.2 割合が考えられる根拠としての事象の均質性

また、前田(1960)は、「均質と考えられない集団や、集合数ではなく順序数で表されるようなものについては、割合で考えることは誤りである。」(p242)と述べ、事象の点からも均質性について言及している。以下の、成績の問題を例に説明している。

A君は100番中の25番で、B君は150番中の30番であったとする。このとき、 $25 \div 100 = 0.25$ 、 $30 \div 150 = 0.2$ を比べて、B君の方が成績がよいとは、必ずしもいえない。人数を100人から150人にふやすとき、成績の悪い子だけがふえても、上位の子どもの成績の順位には影響がないからである。

しかし、例えば、同じ問題で5年生の学力テストをしたとき、Aの学校では100人中25人が優であり、Bの学校では150人中30人が優であったというような場合には、Aの学級のほうが、成績が良いと考えてもよい。(p242)

後者の事例は、人数という観点でそれぞれの学校でテストを受けた5年生の人数を見れば、均質な集団とみなせる。そのため、前者のように個人の成績は影響しない。しかし、前者は個々の得点の分布が問題となるため、均質な集団と見なすことには適さないのである。

このように、前田は、均質と考えられる事象と考えられない事象を区別している点から、均質性を考える上では、事象が均質であるかどうかを注意深く考える必要がある。

よって、前田(1960)に則り、先行研究における均質性の取り扱われ方を「量の均質性」と「事象の均質性」の双方の視点から整理し、本研究の位置付けを明らかにするとともに、次の図3の枠組みを用いて児童が均質性を認める際の様相を分析し、均質性の概念をより具体化していく。

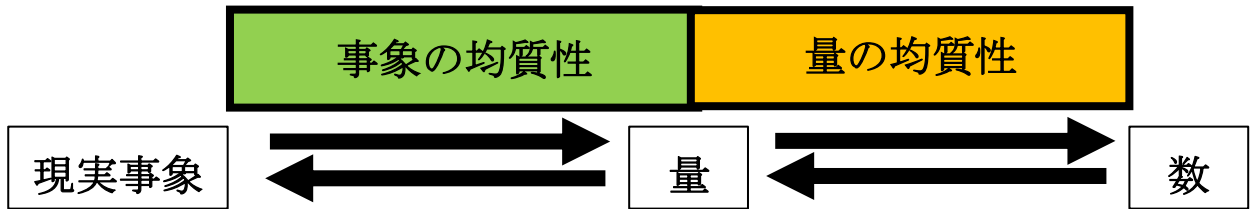


図3

4 調査問題の開発

4.1 調査問題作成の意図

本研究では、児童が事象や量の均質性をどのように認めているかを調査していく。調査問題として二つの事象(ゴムひもと果汁入りジュース)を取り扱う。ゴムひもは、児童が日頃から身に着ける紅白帽子に付属していることや、低学年時の経験として生活科の学習や、中学年以降の理科の学習で取り扱ったことがあるため、児童の生活経験に根差したものであるといえる。また、長さの変化が視覚的にも確認できることから、均質性を認めやすい事象だと考えている。

果汁入りジュースは、児童が一度は飲んだ経験があったり、生活経験から知っていたりすることが予想される。しかし、果汁と水は混ざり合うことで元々の液量が視覚的に捉えられなくなるため、内包される2量を視覚的に捉えることは難しい。


これら二つの事象を取り扱い、それぞれの事象に対して児童がどのように均質性を認めていくのかを明らかにしていく。

4.2 ゴムひもを取り扱う問題についての開発の意図

本問題では、以下の例示したゴムひもの長さから均質性を前提とした事象としてゴムひもを捉えられるようにした。

問題①

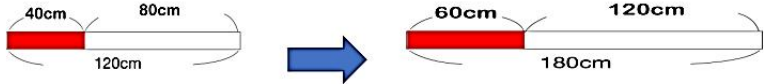
こうたさんは下の写真のように、A社の白ゴムひもを買ってゴムひもの伸びを調べています。こうたさんは、120cmの白ゴムひもは180cmまで伸びることが分かりました。



こうたさんは、この白ゴムひもの一部を赤くぬってみることにしました。すると、下のように伸びました。

ぬった後

伸ばす前 伸ばした後



同じ白ゴムひもについて、ぬり方を変えてみることにします。次の(1)、(2)、(3)、(4)に答えましょう。

図4

伸びる前と伸びた後のゴムひもは、それぞれ全体量と二つの部分量からなる対応する3量ずつで構成しているため、見かけ上の6量の中から対応する2量を見付け、ゴムひもの伸びを判断する必要がある。伸びる前と伸ばした後の長さの中から対応する2量に着目し、例示したゴムひも全体が1.5倍に変化することや、赤い部分や白い部分同様に1.5倍に変化することを確認すれば、ゴムひもを均質に伸びる事象として理解できる。しかし、この理解の様相は児童によって様々であると考えられる。例えば、ゴムひも

を均質に変化する事象と認めている児童は、全体の長さが1.5倍に変化することを調べただけで、赤い部分の長さも白い部分の長さも1.5倍に変化すると考えることができるはずである。こうした理解の様相を分析していくことで、事象の均質性の理解の様相を明らかにしていく。

また、問題は(1)から(4)までの4問を設け、それぞれに赤白の部分の長さの比の違いや、ゴムひも全体の長さの違いをつくり、その違いが児童の理解にどのような影響を及ぼすかを確認していく。

問題

- ①こうたさんは、120(60)cmのA社の白ゴムひもを図のようにぬり、180(90)cmまで伸ばしました。
 ・「伸ばした後」の赤い部分と白い部分がどうなるか分かるように図に色をぬり、それぞれの長さを書きましょう。
 ・どのように考えたのか、言葉や式を使って説明しましょう。

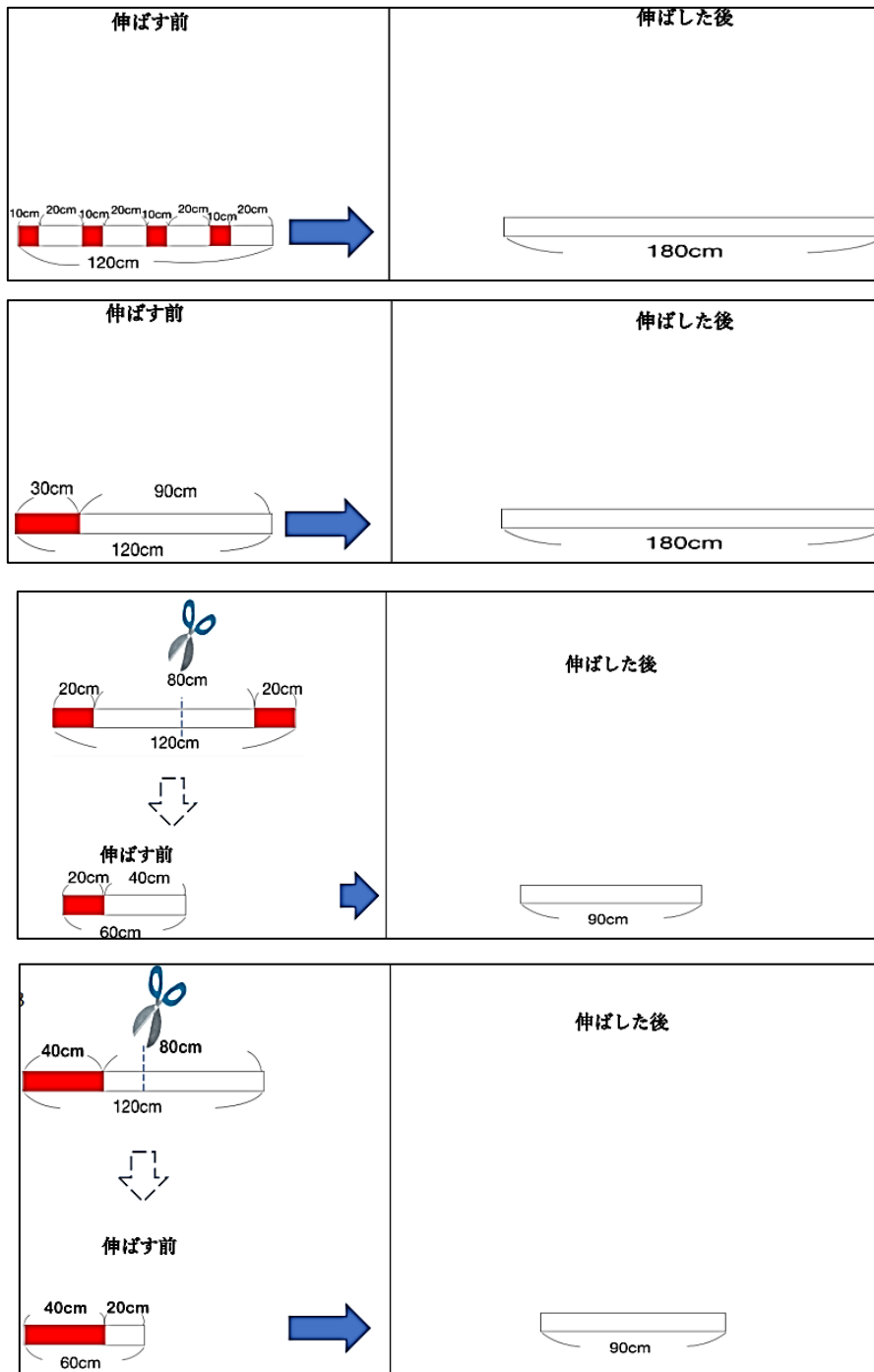


図5 上から順に、問題文、問題①(1)、①(2)、①(3)、①(4)

4. 3 果汁入りジュースを取り扱う問題

果汁入りジュースについては、例示した果汁入りジュースと問題で取り上げる果汁入りジュースが「同じ濃さ」であることや「偏りなく混ざり合っている」ことを前提に考えれば事象が均質に変化することも捉えられるようにしている。ゴムひもの問題と同じように全体量と二つの部分量からなる問題とすることで、ゴムひもの問題の解決と果汁入りジュースの解決過程を比較できるようにした。そうすることで、事象の違いによる均質性の理解の違いを顕在化しやすいようにした。

問題①から問題②(2)までは量の大きさを問う問題、問題③については、数を問う問題とした。量を問う問題で調べた均質性の理解と、数を問う問題から分かる割合の理解とのつながりを考察するためである。果汁入りのジュースについて考えます。

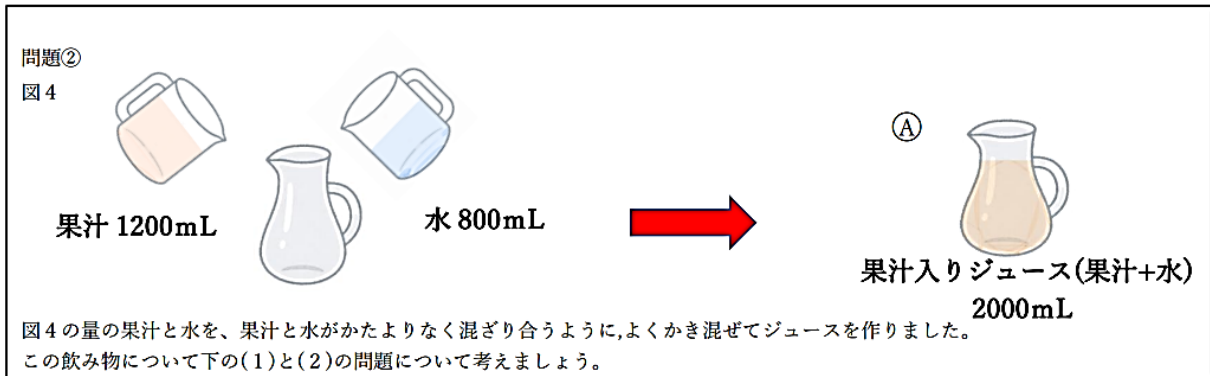


図6 問題文

(1) Aの果汁入りのジュース 2000mL を2人で等しく分けました。

1人分の果汁の量と水の量はそれぞれ何 mL ずつになりますか。式や図、言葉を使って説明しましょう。

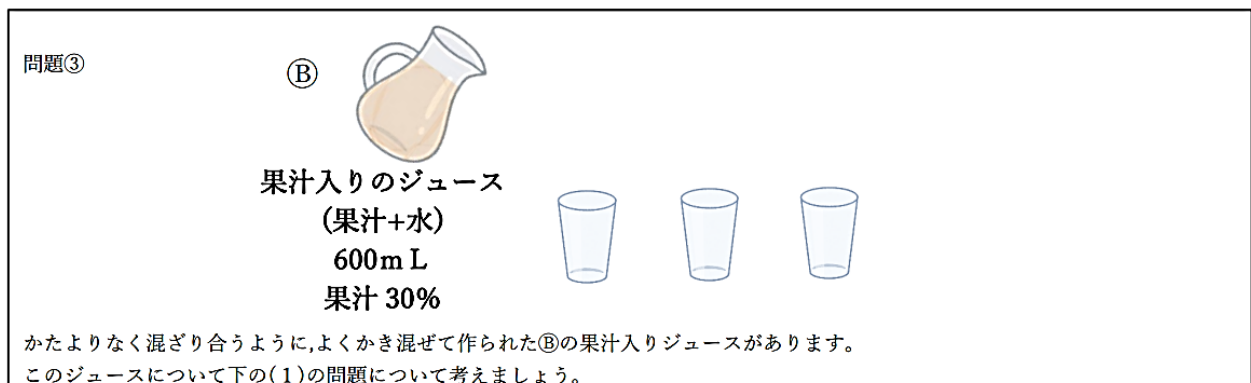
説明

(2) Aの果汁入りのジュースと同じ濃さで 1500mL の果汁入りのジュースを作ります。

1人分の果汁の量と水の量はそれぞれ何 mL ずつになりますか。式や図、言葉を使って説明しましょう。

説明

図7 問題②(1)(上) 問題②(2)(下)



(1) Bのジュースを3人で等しく分けるとき、1人分の飲み物によくまれている果汁の量の割合は何%になりますか。式や図、言葉を使って説明しましょう。

説明

図8 問題文(上), 問題③(下)

4. 4 質問紙調査の方法

令和4年12月12日、都内公立小学校の第6学年29人を対象に質問紙を用いた調査を実施した。上述の7問を提示し、解決時間を30分とした。紙幅の都合上、本稿では、一部児童の解答のみを抜粋していく。

4. 5 質問紙調査の結果

以下では、質問紙調査の結果をもとにゴムひもや果汁入りジュースの均質性に関わる児童の様相を考察していく。質問紙調査における29人の児童の反応数は表1の通りである。

表1 児童の解決結果

問題番号	問題① ゴムひも				問題② ジュース		問題③ ジュース(割合)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(1)
正答	17	16	20	20	24	12	5
誤答	12	13	9	8	4	14	21
無答	0	0	0	1	1	3	3

表1は、質問紙調査の結果を問題毎に正誤に着目してまとめたものである。事象毎の正誤を比較するため、特に構造が類似している問題①(2)と問題②(2)の結果をみると、事象による正誤の違いはあまりないことが分かる。また、「何mLになりますか」と量で問う問題②(1)と「何%になりますか」と割合で問う問題③ののでは、正答数に大きな差が出ている。出題形式、値、前提条件などの影響により、均質性の理解の様相は単純ではないことが分かる。

以上のことから、児童の均質性の理解の様相をより精緻に分析していくため、個々の児童の解決方法に着目していく。なお、紙幅の都合上、本稿では、一部児童(仮名)の解答のみを抜粋する。

5 質問紙調査の分析

5. 1 差を等量ずつ分ける川相

児童の解決方法に焦点を当て6名の児童の解決方法の分析結果を示していく。

川相は、問題①(1)(2)では、「伸ばす前と後で60cm伸びていて2色あるので÷2をして30cmが二つになり、赤色、白色それぞれに30cmずつ足しました。」としていることから、伸ばす前と伸ばした後の全体の長さの差の60cmに着目し、赤白それぞれの伸びる前の長さに等分して足している。以降では、川相のように2量を見比べ、差をとる解決方法を差の考えとしていく。

他のゴムひもの問題や果汁入りジュースの問題も(2)と同様の記述が見られることから、川相は一貫して差の考えを用いて、その差を等量ずつ分ける考えを用いているといえる。

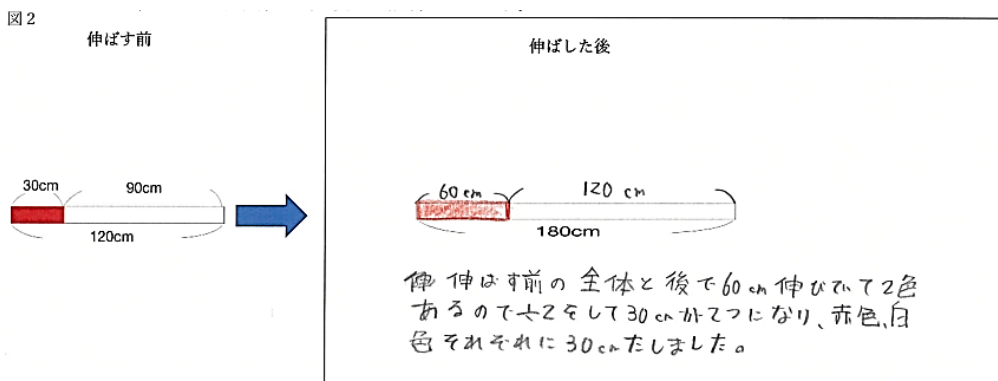


図9

5. 2 ゴムひもでは差の考えを用いるが、果汁入りジュースでは比を用いる西浦

問題①(2)では、「120 から 180 まで 60 増えているので、 $60 \div 2 = 30$ でどちらも 30 たして 60cm120cm になりました。」と記していることから、差の考えを用いて伸びた分の長さの 60cm を求め、赤白 2 色にそれぞれ等量ずつ加えている。

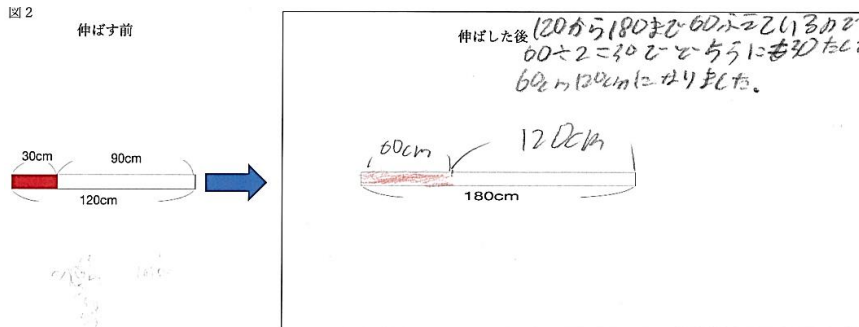


図 10

問題②(2)では、「比が 3 : 2 なので、 $3 + 2 = 5$ で $1500 \div 5 = 300$ で 1 が 300 ということが分かりました。なので $300 \times 3 = 900$ で $300 \times 2 = 600$ なので・・・」と記している。ゴムひもの問題とは異なり、果汁入りジュースに内包される果汁と水の比を考えて果汁入りジュース 1500mLあたりの果汁と水の量を求めている。以降では、2 量を見比べて比で表現する考えを比の考えとしていく。

(2) A の果汁入りのジュースと同じ濃さで 1500mL の果汁入りのジュースを作ります。
1 人分の果汁の量と水の量はそれぞれ何 mL ずつになりますか。式や図、言葉を使って説明しましょう。

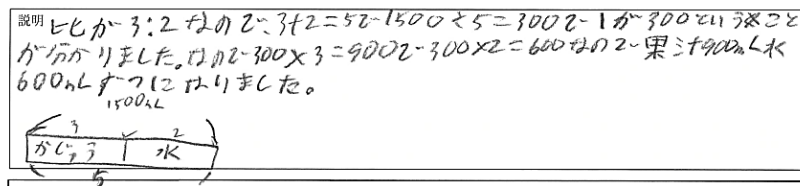


図 11

以上のことから、西浦は、ゴムひもについては差の考えを用いて差を等分するが、果汁入りジュースについては、果汁と水の比を保ったまま果汁入りジュースの変化を考える点が特徴的である。

5. 3 差の考えで答を求め、比の考えで答の妥当性を確認する中山

中山は、問題①(1)では、「 $120 - 80 = 40$, $60 - 40 = 20$ 」と記していることから、差の考えを用いて、赤い部分や白い部分の伸びた分の長さを求め、赤い部分や白い部分の伸びす前の長さに加えている。また、 $10 : 20 = 1 : 2$ や $30 : 60 = 1 : 2$ を「同じ」と書いて矢印でつなぎ、伸びす前の赤白の長さの比と伸びした後の赤白の長さの比が等しくなっていることを確認している。問題①の(2)や(4)でも同様の確認をしている。

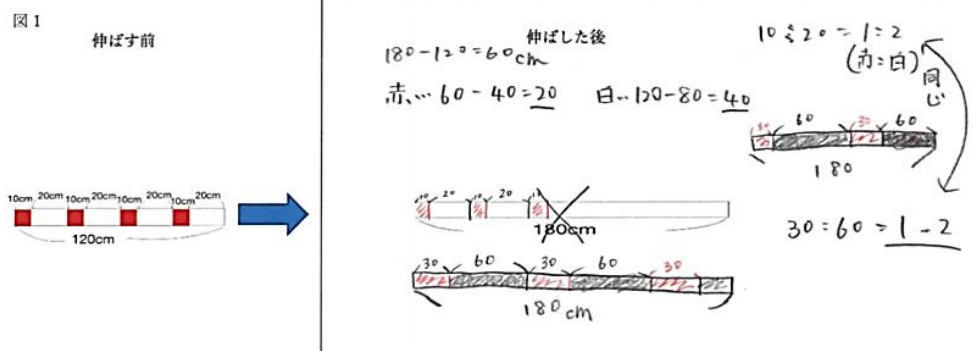


図 12

問題②(2)では、「 $2000 - 1500 = 500$, $500 \div 2 = 250$, $1200 - 250 = 950$ ⑩, $800 - 250 = 550$ ⑪」と記していることから、変化する前後の差を等量ずつ分けて引く考えを用いた後に、果汁と水の比を確かめている。また、「⑩=400mL, $500 = 300 \times 200 = 3:2$, $1200 - 300 = 900$, $800 - 200 = 600$ 」と記し、解を果汁 900mL と水 600mL としていることから、差の考えを用いて解を出したが、比を用いた解を最終的な解としている。

(2) A の果汁入りのジュースと同じ濃さで 1500mL の果汁入りのジュースを作ります。
 1人分の果汁の量と水の量はそれぞれ何 mL ずつになりますか。式や図、言葉を使って説明しましょう。

説明

$2000 - 1500 = 500$ $500 \div 2 = 250$ $1200 - 250 = 950$ $800 - 250 = 550$

⑩ = 400 mL $500 = 300 \times 200 = 3:2$ {60% = 果汁} ⑪

$1200 - 300 = 900$ $800 - 200 = 600$

果汁...900mL 水...600mL

図 13

中山は、例示したゴムひもと同じ分だけ差を加える考えや、差を等量ずつ分ける考えなどを用いた。また、求めた解について、問題①(3)を除いては、どの問題においても比を用いて確認した点が特徴的であった。

5. 4 問題を解決する過程でゴムひもの事象としての均質性を認めた可能性がある星

星は、次の図 14 のように「 $120 \div 2 = 60$, $120 + 60 = 180$ 」や「長さの半分を足す」と記し、赤い部分や白い部分が「長さの半分を足す方法」であることを確認した式はないことから、ゴムひも全体の伸び方と赤い部分や白い部分の伸び方は同じものとして考えていた可能性がある。(1)から(3)については、「長さの半分を足す」方法で求めた赤い部分や白い部分の長さを足し合わせ、180cm や 90cm になっていることを確認しているが、(4)では確認していないことから、例示したゴムひもと比較して(1)は赤白の配色の違い、(2)は赤白の配色の比の違い、(3)は、ゴムひもの長さの違いを確かめ、(1)から(3)で取り扱うゴムひもがどれも「長さの半分を足す方法」で問題の条件に合う長さになるかを確認し、ゴムひもの事象としての均質性を認めた可能性がある。

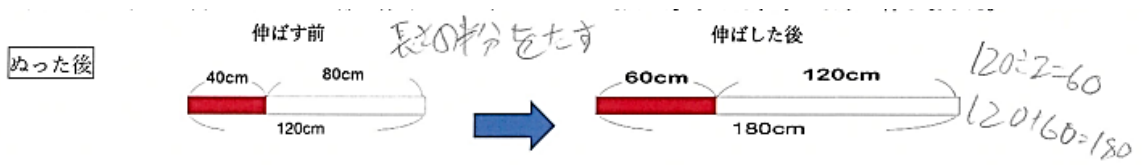


図 14

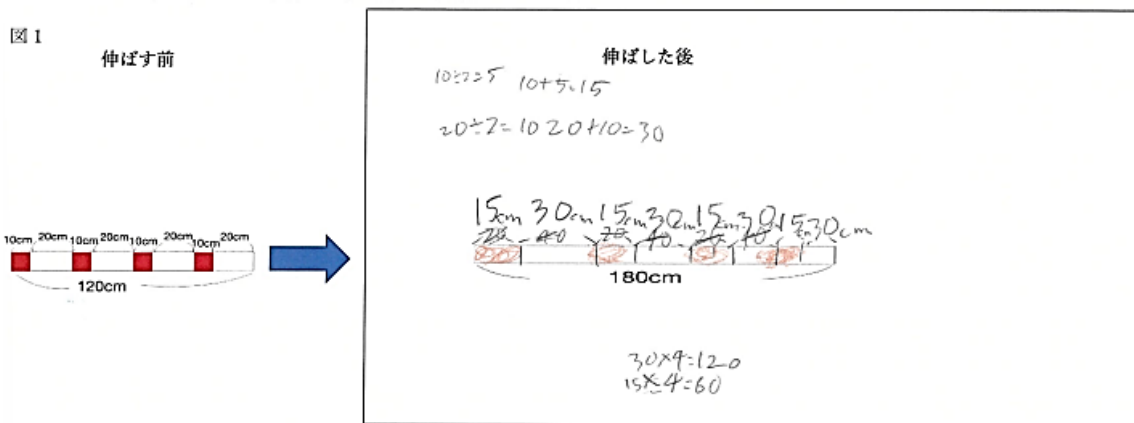
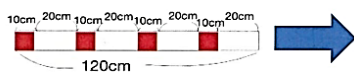


図 15

5. 5 ゴムひもの長さを量として均質なものと認めている可能性がある岡本(25)と上原(19)

岡本は、問題①(1)では、「120cmから180cmが1.5倍だから赤も $10 \times 1.5 = 15$ (cm)、白も $20 \times 1.5 = 30$ (cm)」と記し、(2)以降もすべての問題で全体の長さを1.5倍にして各部分も1.5倍にする解決方法を用いている。以降では、このように2量を見比べ、倍で表現したものを倍の考えとしていく。また、岡本は、問題②(2)についても全体量の倍関係を調べ、部分量を等倍することで解決していたことから、事象に関わらず量を見比べることで均質性を認められる児童だと考えられる。岡本は、事象を量として捉えて均質に変化することを認めている可能性がある。

図1 伸ばす前



伸ばした後

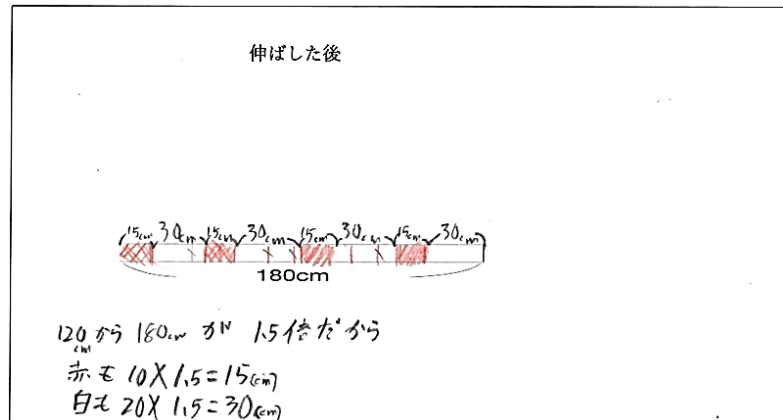
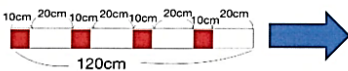


図16

上原は、次の図17のように「伸びたのは、120cmから180cmで、 $180 \div 120 = 1.5$ 倍になっている。赤と白の部分の長さも、〈赤〉 $60 \div 40 = 1.5$ 〈白〉 $120 \div 80 = 1.5$ と全て1.5倍になる。よって〈赤〉 $10 \times 1.5 = 15$ cm 〈白〉 $20 \times 1.5 = 30$ cmとなった。」と記していることから、問題①(1)で例示したゴムひも全体や各部分の伸びる前後の長さの変化をそれぞれ確認し、「全て1.5倍になる」として、問題①(1)のゴムひもが均質に変化することを認めた可能性がある。

図1 伸ばす前



$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 1.5 \\ \hline 150 \end{array}$$

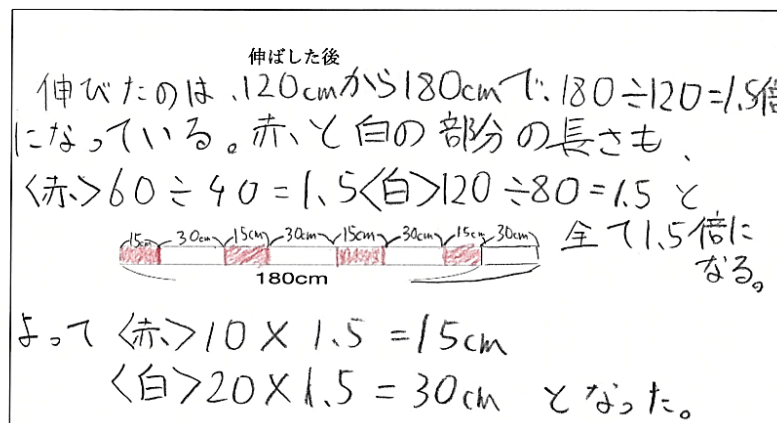


図17

(2)以降は、各部分の長さを1.5倍ずつにして解決していることや、(3)(4)では、「切っても変わらずに1.5倍のびる」と記していることから、赤白の配色や配色の比、全体の長が変わってもゴムひも全体が1.5倍になれば赤い部分の長さも白い部分の長さも1.5倍になることを理解しているようである。

5. 6 インタビューの概要

上記の抽出児童の調査結果を「対象としての量」と「対象としての事象」の二つの視点で分析すると、均質性の理解の層として以下の二つが考えられ、図 18 のようになる。

- I. 岡本や上原, 星のように, 2 量を見比べ, 倍の考えで確認をすることで, ゴムひもや果汁入りジュースを均質に変化するものとする
- II. 中山, 西浦, 川相のように, 差の考えを用いて変化した量(伸ばした長さや増えた容積)に着目し, 変化前の 2 量の比は考えず, その変化した量を等分して考える

以上の二つの層の 7 人⁵の児童を対象にインタビュー調査を実施し, 均質性の理解の様相を精緻化し, 学習指導の示唆を得ていく。

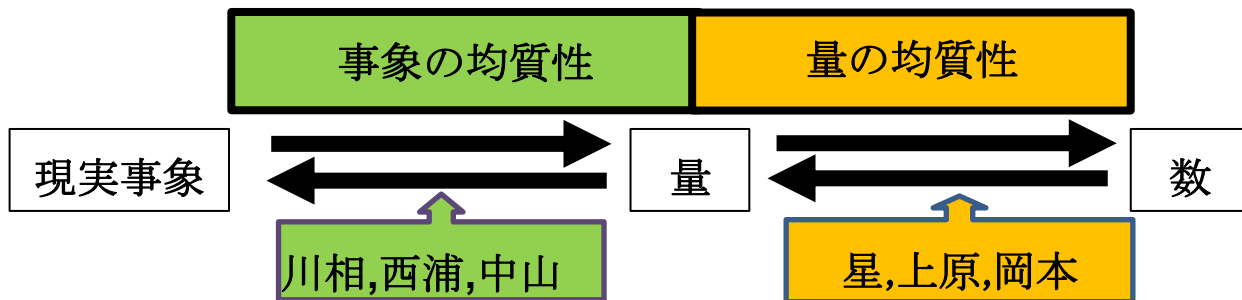


図 18 前田 (1960 参照)

5. 7 インタビュー調査の流れ

個人調査(川相)

- ① 質問紙の解答の説明
- ② ゴムひもの操作⁶(白いゴムひも)
- ③ ゴムひもの操作(赤白 5 cm ずつに色分け)
- ④ 問題①(2)の再解決
- ⑤ ゴムひもの再操作(赤 6 cm 白 4 cm に色分け)
- ⑥ 問題①(2)の再再解決
- ⑦ ゴムひもを操作して気付いたことの確認

ペア調査(西浦&奥川, 中山&岡本, 星&上原)

- ① 質問紙の解答の説明
- ② 解決方法についての対話
- ③ ゴムひもの操作(白いゴムひも)
- ④ ゴムひもの操作(赤 4 cm 白 8 cm に色分け)
- ⑤ ゴムひもの操作(赤白 5 cm ずつに色分け)⁷
- ⑥ 問題①(1)の再解決
- ⑦ ⑥で描いた図についての対話
- ⑧ 問題②(2)の図示
- ⑨ ⑧で描いた図についての対話
- ⑩ 問題①と問題②の共通点についての対話

⁵ 紙幅の都合上, 奥川の調査記録は掲載せず。

⁶ ゴムひもの操作は, 伸び縮みさせる活動と, ゴムひもの伸びを物差しで測り取り, 長さの値の変化と見かけ上の変化を関連付けてホワイトボードにまとめる活動の双方を指した活動である。

⁷ 奥川と西浦のペアについては, ④の活動を行った。

5. 8 インタビューの結果と考察

5. 8. 1 変化前と変化後の2量を対象とすることが困難な川相のゴムひもの均質性の理解

川相は、ゴムひもの変化を捉えるための2量を定めることができずに混乱することになった。まず、質問紙調査を想起すると、「この赤と白の割合が元々違ったので、それで伸びる影響が違うんじゃないかなって思った。」とした。伸ばす前の赤い部分と白い部分の長さの違いが伸びる長さに影響すると考えていることが分かる。

その後、川相に赤白各5cmずつに色分けしたゴムひもを渡し、伸び縮みさせたり、物差しで実測させたりして、次の図19のようにその変化を整理させると「(前略)、赤と白のそれぞれの長さの、に対して同じ、同じような形のまま保っているっていうようなイメージ。」や「どっちかが一方的に伸びているのじゃなくて、赤と白どちらも同じように伸びている。」と話した。

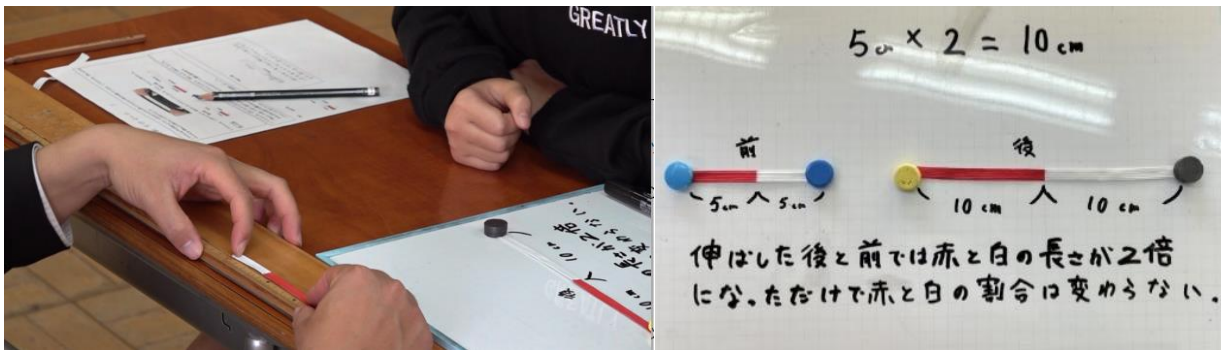


図 19

次に、問題①(2)の再解決の時間を取ると、図20の四角囲み(実線)の部分を書いたことから、質問紙の解決時と同じ考えを用いている。

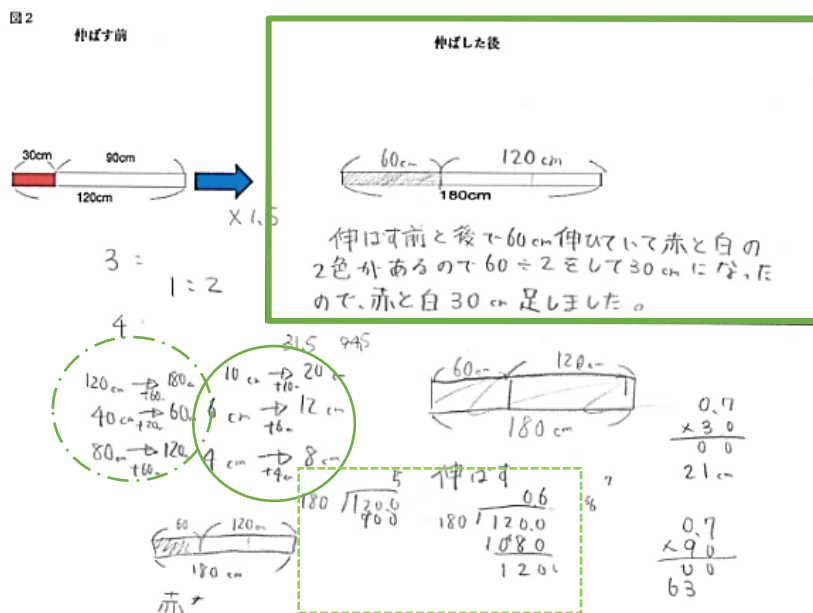


図 20

そこで、今度は赤6cm 白4cmに色分けされたゴムひもを図19のように実測させ、長さの変化を整理させると、図20右の円(実線)で囲んだ部分のように記録している過程で「うわあ」と声を上げた。声を上げた理由を聞くと、「最初は同じ数ずつ足すって思っていて、こっちで確かめてみると、最初の4から8には4cm足されているんですけど、6cmの方では6cm足されているので、違ったなって思って」と話した。赤白の配色の比が2:3のゴムひもを操作したことで、これまでの等量ずつ変化する、という考え

が誤りであったことに気付いたようであった。

その後、考えの変化を確かめるため、再々解決の時間をとると、図 20 の円(点線)、四角囲み(太枠実線)内の比の順に記し、「計算で求めることが難しいので」と言って手を止めた。解決方法の説明を求めると、「この伸びた数は、なんか割合とか、もとの長さの赤、赤の場合だったら、伸ばす前の赤と関係あるのかって、伸びる数が関係あるのかって思ったんですけど、全部見てみてもあんまり規則はなくて」と答えた。

次に、図 20 の四角囲み(点線)の部分に筆算を書いた意図を問うと、「これは 120 cm と 180 cm で、120 から 180 で、伸びた、どん、倍、どんくらい伸びたかを、□倍とか、△倍とか求めたくてやってみたんですけど、ずっと 6 が続いて途中で断念しました。」と述べた。

最後に、質問紙調査時と現在の考えの変化を問うと、「前は同じずつ増えると思っていたけど、色々な長さをやってみて、伸びる長さに規則性がなくて、ないってことが分かりました。」と述べた。

以上のことから、川相は着目する 2 量やその 2 量を用いた考え方が定まらず、解決に困難さを示した。ゴムひもの伸び率の違いや長さの違い、赤白の配色の違いといった様々な条件の違いを考える対象とさせてしまったことで、混乱してしまったといえる。

5. 8. 2 果汁入りジュースの変化を比から差で考えるようになった西浦の均質性の理解

西浦は、質問紙調査では、ゴムひもについては、差の考えを用いて伸びた長さを等量ずつ分けていたが、果汁入りジュースについては比の考えを用いていた。

赤 5 cm 白 5 cm に色分けされたゴムひもを実測し、長さの視覚的な変化と値の変化を対応付ける活動を行うと、ゴムひもの変化を図 21 のように「赤と白と全体が 2 倍になっている」と記述した。このとき、ゴムひもの関係は今まで考えていたことと同じかどうかを問うと、「同じ」と答えた。この段階では、等量ずつ伸びることとすべて 2 倍に伸びることを同じこととして捉えていた可能性がある。

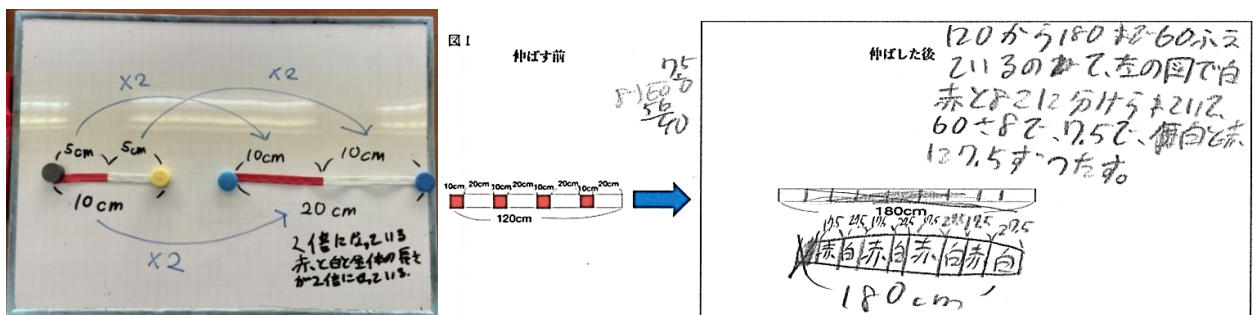


図 21 ゴムひもの変化の整理(左) 問題①(1)の再解決(右)

この後、問題①(1)の再解決の時間をとると、西浦は図 21(右)のように解答した。「120 から 180 まで 60 ふえているので、左の図で白赤と 8 こに分けられていて、 $60 \div 8$ で、7.5 で、白と赤に 7.5 ずつ足す。」と記したことから、考えに変化がないことが分かる。西浦は、「2 倍」という言葉を用いて実際に操作したゴムひもの関係を捉えても、差の考えで等量ずつ分ける考えを変えることは難しいことが分かる。

次に、問題②(2)の果汁入りジュースでは、果汁と水を対象として取り扱い方は比であった。しかし、インタビューで問題②(2)の解決を促すと、次の図 22 のように記述し、「 $400+250$ で 650 mL が水で、果汁が $600+250$ で、850 mL で、250 は 1000 から 1500 mL に足された 500 mL。」と説明した。果汁と水の量を対象として比で考えていた問題で差の考えを用いるようになった。

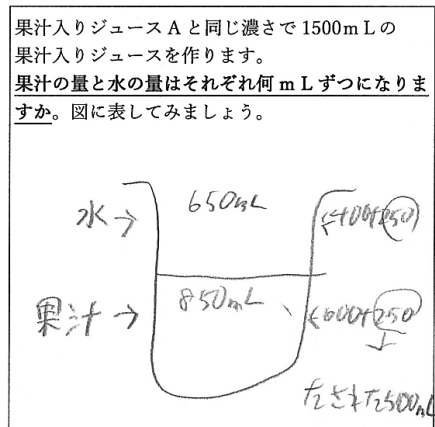


図 22 ②(2)再解決

ゴムひもの問題と果汁入りジュースの問題の共通点を問うと、「同じずつ足すっていうのがちょっとだけ似ている」と答えた。差の考えで解決した理由を問うと、「こっちの方がやりやすそうだったから」と述べた。

西浦は、具体的な事象の変化としてゴムひもの変化を等量ずつ増えるものと確認したことで、別の事象である果汁入りジュースについても等量ずつ増えるものとして捉えた可能性がある。

5. 8. 3 変化前と変化後の量の比を確認することで均質性を認めようとする中山

中山は、質問紙調査時の解答を想起し、「(前略)、先ほど言ったように上の図では、赤が 20cm 伸びているので、この図でも 20cm 伸びているのではないかと思います。それは白も一緒に、上も 40cm 伸びていたの、下も 40cm 伸びるのではないかと思います。そして私は、まず、赤対白の全体が 120cm だった場合の比を出しました。すると、 $10:20=1:2$ これが伸ばす前の赤対白の比になります。次に、私が予想した 180cm に伸ばした場合のときの比は $30:60=1:2$ 、これだと先ほどの伸ばす前と比が同じになるので、やはり伸ばす前と伸ばした後の比は同じになるはずかなって考えたので、そこから比で答えを出しました。」と述べた。差の考えで求めた長さを「予想」とし、伸ばす前の赤白の長さの比と伸ばした後の赤白の長さの比がそれぞれ $2:1$ として等しくなることを確かめた結果を答えとしている。

次に、実際に赤 4cm 白 8cm に色分けされたゴムひものを伸び縮みさせると、「(前略)、例えば、伸ばしたときに増えるのはそうなんですけど、ちょっとともっと長い白とかの方が長く伸びるって言うのもそうですし、これ(質問紙調査で例示した問題を指で指す)みたいにいい割合で同じ分、伸びるってのがそうなのかなっていうのをこれを解いていて思いました。」と述べた。

中山は、質問紙調査で例示したゴムひもの赤い部分と白い部分の長さが比を保ったまま伸びることに疑問をもっていたようである。この疑問が、例示したゴムひもの赤い部分と白い部分の伸びた長さの分だけ、問題①(1)も伸ばす考えを「予想」と述べ、比を用いた確認をしていたことの原因だと考えられる。

その後、赤 4cm 白 8cm に色分けされたゴムひもの長さを実測し、その長さの値を見かけ上の変化と関連付けたことで、「(前略)、伸ばした後は多少誤差があるんですけど、誤差なくやったら多分同じになるので、このとき(質問紙の問題を指で指す)は、やっぱり伸ばしたらうまく同じ分伸びるのかなって思っていたんですけど、今やってみて、伸ばしてみても同じ分ちゃんと伸びるっていうのが分かった。」と述べた。ゴムひものを実測し、値と対応させたことで赤と白の長さ比の $1:2$ が保たれることを確認することができた。

その後、問題①(1)を再解決する時間をとると、以下のように解決し、「(前略)、今回の問題で、赤と白の割合が $1:2$ じゃなかったら、上の 1.5 倍は使えないんですけど、今回も伸ばす前の赤と白の割合が $1:2$

になっていたのに、今回も上の岡本さんのやり方でもできるなって思ったので、まず赤から出すんですが、赤は 10×1.5 で 15cm 、これが伸ばした後の赤になって、白は 20×1.5 で 30 になりました。これだけでは、本当にあっているかなって心配なので、一応比でやってみて、 $15 : 30$ をしてみたら $1 : 2$ になっていたので、確かめ算をしてみたら $1 : 2$ になっていたので自信をもって書きました。」

ここでは、例示されたゴムひもの赤白の長さの比が $1 : 2$ であることや図1の赤白の長さが $1 : 2$ であれば赤い部分と白い部分の長さを 1.5 倍にできると考えていたようである。また、この時点では、赤い部分と白い部分の長さをそれぞれ 1.5 倍にした後にも、伸ばした後のゴムひもの赤白の長さが $1 : 2$ であることを確認しているため、ゴムひもが均質に変化することの理解は確かではないと分かる。

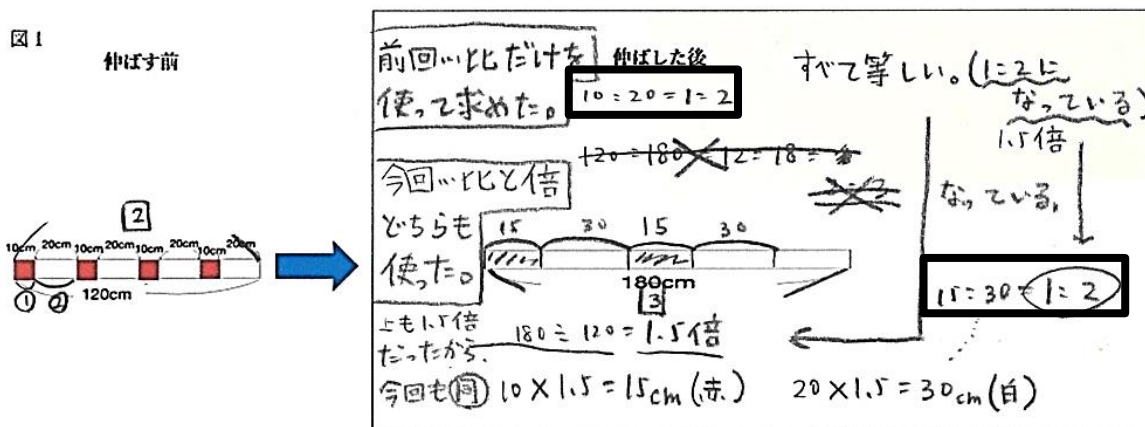
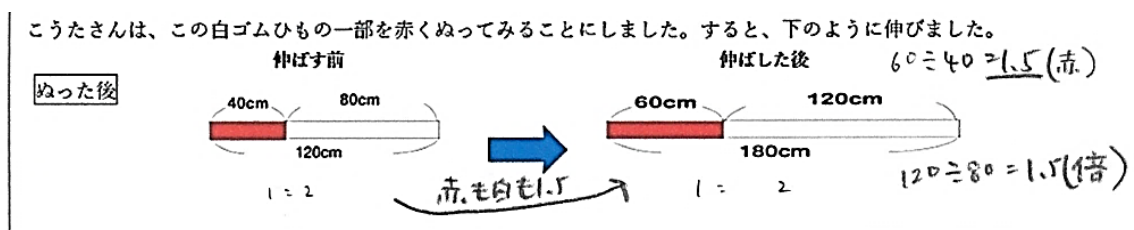


図23 問題①(1)の再解決

再び、質問紙調査の問題①(1)を解く時間をとると、図23のように解決した。これまでは一貫して図23の四角内の長さの比を解決方法としていた中山が、例示したゴムひもは「赤も白も 1.5 倍」と記したり、「 $180 \div 120 = 1.5$ 倍、上も 1.5 倍だったから今回も同」と記したりしていることから、ゴムひもの事象としての均質性を認めたことで、伸びる前と伸ばした後の長さを対象として倍関係で思考し始めたことが分かる。例示されたゴムひもの伸ばす前後の赤白の長さを対象として比が $1 : 2$ であることを確かめたことで倍関係が使えるようになった可能性がある。

5. 8. 4 全体量に伴って部分量が均質に変化することを理解している岡本

赤 4cm 白 8cm のゴムひもを実際に伸び縮みさせ、感じたことを問うと、「ぼくは、最初とか、だいたいこうかなって想像していたけど、意外とあつた。」と述べた。ゴムひも自体が均質に変化しないかもしれないことを考えながら、均質性を仮定して解決していたようであった。赤 4cm 白 8cm に色分けされたゴムひもの長さの視覚的な変化と値の変化を関連付けると、「実際、同じでした」と述べたことから、仮定していたゴムひもの変化を確かにしたようであった。

その後、問題①(1)と問題②(2)とを再解決すると、質問紙調査時と同様にどちらも倍の考えで解決した。

問題②(2)の再解決後に、ゴムひもの問題と果汁入りジュースの問題の共通点を問うと「ぼくも果汁入りジュースが全体で、水が赤の部分で、果汁が白だと考え、合わせたときに、増え方が全体の長さの中での長さで増え方が同じだったり、減り方が同じだったりするところが似ていると思う。」と述べた。全体と中

(部分)という視点からゴムひもの増減と果汁入りジュースの増減を同じものとして捉えていることから、事象の均質性の理解を基に量の関係として捉えていることが分かる。

5. 8. 5 ゴムひもの均質性と果汁入りジュースの均質性を関連付けることで、具体的変化を離れ、量と数の関係について思考する星と上原

問題①(1)と問題②(2)の再解決後に、ゴムひもの問題と果汁入りジュースの共通点を問うと、星は、「なんだっけ、前、比例だっけ、比例だった気がする、それみたい。こっちが伸びると、それに比例してこっちも伸びるから、だから、こっちがかける何すると、それに比例してこっちもかける何するみたいなの、そんな奴だった気がする.」とし、比例で二つの事象の変化を捉え直したため、詳しい説明を求めると、ゴムひもについては「だから、全体量が伸びると、それに比例してこの赤い部分白い部分も伸びるから、一緒にその全体がかける何されたら、それと同じ感じにこっちも伸びる、みたいな、そんな感じ」とし、果汁入りジュースについては「ジュースも全体量が2000から1000になったときとかに、2000のときで1200,800って分かっていると、2000から1000に下がったときに、全体が半分になったから、この1200,800を半分にして600,400・・・」と説明した。この説明に対して、上原が「さっきの比例って言っていたやつ、星さんは全体とその赤白それぞれだけど、私があるとき思っていたのは、赤がこんぐらい伸びると白がこんぐらい伸びるって考えていたけど、全体と、じゃないのがちがう」と反応した。それに対して星は、「比例って言っても、全体と赤白、ジュースで言っても全体と果汁と水って3個あるから、その比例のなんっていうか比例の組み合わせ方みたいなの、ちょっと違っても答えは多分一緒になるはず」とした。上原は「これのときも赤が1.5倍で白も1.5倍で全体も1.5倍だから、まあ、どれでも1.5倍だから大丈夫.」と共感した。

以上のことから、星や上原のようにゴムひもと果汁入りジュース、二つの事象としての均質性を認めている児童は、それらの事象の共通点を考えることで、量の関係から変化を考える可能性が示された。

6 本研究の結論

6. 1 本研究の成果としての均質性の理解の様相

調査結果を分析したことで、ゴムひもの問題や果汁入りジュースの問題において、児童の均質性の理解の様相が明らかになった。

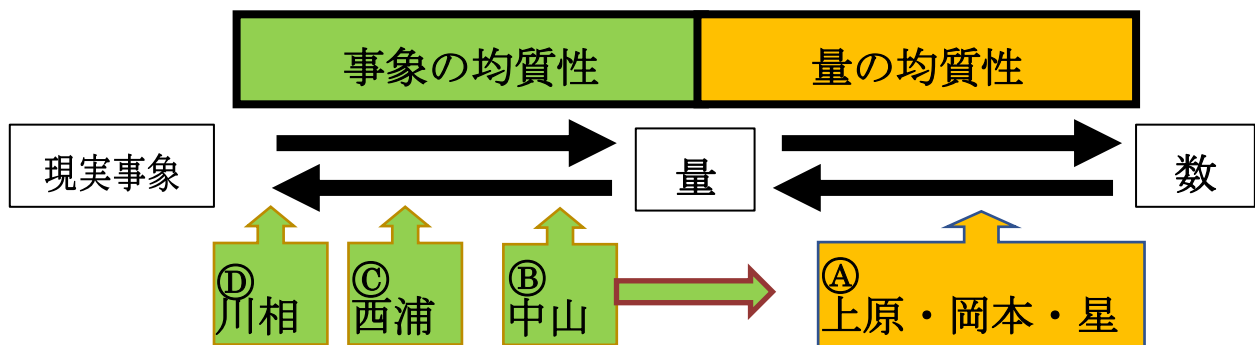


図 24

- A) 事象の均質性をもとに、全体量と部分量の関係に基づいて倍関係(比例関係)で思考する
- B) ゴムひもの均質性を認めず差の考えで思考し、一部、比の考えで確認をしていたが、ゴムひもの事象の均質性を認めたことで、対応する二つの長さを取り出し、倍の考えで思考する
- C) ゴムひもの見かけ上の変化の影響を受け、変化する前の量の比を意識することができない

D) 変化を特定するための2量を特定できずに差の考えを用いる
以上の均質性の理解の様相を踏まえ、以下のように学習指導を提案する。

6. 2 学習指導への示唆

上述の調査結果を基に作成した学習指導案については紙幅の都合上、割愛する。本稿では手立てのみを以下で記述していく。

6. 2. 1 事象の均質性をもとに量の関係として捉えられるようにする指導

現行の教科書では、第4学年と第5学年で割合の学習を行い、複数の事象を取り扱うが、複数の事象を関連付けて数量関係を考えるような学習活動は意図されていない。しかし、それでは、各事象の均質性を認める段階に留まり、量一般の関係まで考えられない可能性もある。そこで、ゴムひもや果汁入りジュースの問題のように、同じ問題構造で別の事象を取り扱う問題場면을提示し、その共通点を考える学習活動を行うことで、事象の均質性の理解をもとに事象の関係を量の関係として捉えられるようにしていく。

6. 2. 2 ゴムひもの見かけ上の変化と値の変化の対応付ける指導

中山のように、ゴムひもの均質性を認められない児童は一定数いる可能性がある。実際、ゴムひもの変化は、持ち方、伸ばし方、伸ばす力、材質など、様々な要因により、均質に変化しないことがある。そこで、ゴムひもの事象としての均質性を認められるようにするため、ゴムひもの見かけ上の変化と値の変化を実測して確認する活動を行う。それにより、ゴムひもが均質に変化する場合があることを理解し、均質な事象として仮定することができる。この経験により、児童が事象の均質性を認めづらい第5学年の混み具合やバスケットボールのシュートの場面でも均質性を認めていくことにつながる可能性がある。

6. 2. 3 対応する2量に目を向けさせ、変化する前の量の比を意識させるための指導

事象の均質な変化を捉える上では、変化前と変化後の2量を対象に思考することが必要になる。しかし、教科書では、はじめから対象とする変量が指定されているため、複数の変量から必要な変量を取り出して均質性を根拠に問題を解決することの困難さは潜在されたままとなる。そのため、本問題のように、色分けされたゴムひもを段階的に提示する。まずは、赤白1:1ゴムひもを複数提示し、変化前と変化後で対応する2量がどれも2倍、3倍になっていることを理解させる。次に、赤白2:3などのゴムひもを提示し、対応する2量の差が等量ずつ伸びない点に着目させ、伸びる前の長さの比が異なる点を考慮してゴムひもの伸びる長さを考えられるようにしていく。

6. 3 今後の課題

今回の調査では、児童の均質性の理解に関わる様相を明らかにしてきたが、研究の発展性として以下のことが挙げられる。

- (ア) 得られた示唆が授業実践においてどのように作用するのかを検証すること。
- (イ) 中山のようにゴムひもの事象の均質性を認めた児童が他の事象において均質性を認めていく際の様相を調査すること。
- (ウ) 調査対象を拡大し、倍の考えをするために必要な2量を選択できない川相や、2量の特定はできても基準量の比が意識できない西浦のような児童らの均質性の理解の様相を調査すること。